Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja.

Prof. Guillermo Calandrini

2do. cuatrimestre 2019

....

FUNCTIONES DE VARIABLE COMPLEJA — 2º Cuatrimestre 2019

RÉGIMEN DE CURSADO Y PROMOCIÓN -

Cursado

1 La evaluación del cursado tendrá en cuenta 6 (seis) talleres, 3 (tres) exámenes parciales-coloquios, un examen recuperatorio, y la entrega de un informe de una Nota de Aplicación de FVC. Los exámenes incluyen teoría, práctica y recuperatorios de talleres.

2 Cada examen parcial se calificará en escala de 0 a 100 puntos (20 puntos de teoría, 60 puntos de práctica y 20 puntos correspondientes a 2 talleres por parcial). En los puntos de teoría del tercer parcial se incluye la evaluación del resumen de la Nota de Aplicación de FVC (el informe final de la Nota de Aplicación se evalúa al completar la promoción o rendir examen final).

3 Cada taller se califica con 10 puntos si está aprobado y con 0 puntos si es desaprobado. El día del examen parcial se suman los puntos de los talleres aprobados previamente y se podrán recuperar los talleres desaprobados o ausentes.

4 Los alumnos que aprueben al menos 4 talleres (o sus recuperatorios) y obtengan un promedio mayor o igual a 60 (sesenta) puntos entre los tres exámenes parciales, aprobados individualmente con un mínimo de 50 (cincuenta) puntos, tendrán aprobado el cursado de la materia.

5 Los alumnos con tres o más recuperatorios de talleres desaprobados tendrán desaprobado el cursado.

6 Quienes no obtengan un promedio mayor o igual a 60 (sesenta) puntos entre los tres exámenes parciales, pero sí tengan aprobados al menos 4 talleres (o sus recuperatorios), tendrán opción a rendir un recuperatorio. En este examen se recupera cada uno de los parciales que se haya desaprobado con menos de 60 puntos. La aprobación del recuperatorio consiste en obtener un mínimo de 60 (sesenta) puntos en cada parcial recuperado.

7 En caso de inasistencia a un examen parcial se considerará justificada únicamente si se presenta un certificado médico del departamento de sanidad, o certificado de rendir otro examen, en la clase posterior al examen parcial o se avisa por correo electrónico (`calandri@criba.edu.ar`) en la misma fecha y luego se presenta el certificado. De cualquier otro modo la inasistencia se considerará injustificada.

8 En caso de inasistencia:

- si es justificada el alumno rinde el examen ausente en una fecha a acordar durante la semana posterior al examen.
- si es injustificada se considera que el examen y los recuperatorios de talleres están desaprobados.

Promoción

En los exámenes parciales se incluyen ejercicios teóricos. La aprobación de cada coloquio se obtiene aprobando el ejercicio teórico (más de 10 puntos) y sumando más de 60 puntos entre teoría, práctica y talleres.

Quienes no hayan aprobado los coloquios, pueden recuperarlos en la fecha del examen recuperatorio de promoción.

La promoción se obtiene aprobando los coloquios y con la entrega de un trabajo final, que se calificará con un puntaje de 0 a 10 e incluye los temas que no se alcanzaron a evaluar en los parciales y coloquios. La nota final es el promedio de las cuatro notas obtenidas.

Fechas de parciales-coloquios:

Primero..............................**13 de septiembre**

Segundo .... 18 **de octubre**

Tercero .... **22 de noviembre**

Recuperatorio .... **2 de diciembre**

Nota de aplicación:

Resumen................................ **4 de noviembre**

Informe final ....**6 de marzo de 2020**

Talleres:

Primero...................**23 de agosto**

Segundo ....**6 de septiembre**

Tercero ....**27 de septiembre**

Cuarto ....**11 de octubre**

Quinto ....**1 de noviembre**

Sexto .... **15 de noviembre**

Página web de la materia: **http://lcr.uns.edu.ar/fvc/** **(clave: fvc2019)**

Grupo Facebook: **FVC.UNS** (solicitar ser miembro)

PROGRAMA ANALITICO:

1. **Integrales impropias**

   Definición. Criterios de convergencia. Integrales que dependen de un parámetro. Convergencia uniforme. Criterio de Weierstrass. Integración y derivación de una función definida por una integral impropia.

2. **Funciones de una variable compleja**

   Números complejos. Operaciones fundamentales. Geometría del plano complejo. Rectas y circunferencias. Introducción del punto al infinito. Esfera de Riemann. Funciones de una variable compleja. Límites. Continuidad. Diferenciabilidad. Funciones analíticas. Ecuaciones de Cauchy Riemann.

3. **Integral en el campo complejo**

   Definición. Propiedades. Teoría de la integral de Cauchy. Teorema de Cauchy y consecuencias. Fórmulas integrales de Cauchy. Estimaciones de Cauchy para el módulo de las derivadas. Teorema de Liouville. Teorema de Morera.

4. **Series de Potencias**

   Desarrollos en series de Taylor. Círculo de convergencia. Series de Laurent. Puntos singulares de una función. Noción de función multiforme. Singularidades aisladas. Clasificación. Residuos. Teorema de los residuos. Cálculo de integrales.

5. **Transformada de Laplace**

   Definición. Propiedades. Convergencia. Cálculo de transformadas. Teoremas fundamentales. Transformada inversa. Aplicación a la resolución de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Convolución. Funciones impulsivas. Desarrollos de Heaveside. Transformadas de funciones periódicas. Utilización de variable compleja para obtener transformadas inversas por fórmulas integrales.

6. **Series de Fourier**

   Funciones ortogonales. Conjuntos de funciones ortonormales. Sistemas completos. Desarrollos en serie de Funciones ortonormales. Coeficientes de Fourier. Aproximación en media cuadrática. Desigualdad de Bessel. Igualdad de Parseval. Convergencia de las series de Fourier trigonométricas.

7. **Transformaciones en el plano complejo**

   Estudio geométrico de las transformaciones elementales: lineal, inversión, bilineal, potencias, logaritmos y trigonométricas. Transformación conforme. Invarianza de las funciones armónicas respecto a las transformaciones conformes. Aplicaciones.

8. **Integral de Fourier**

   Forma compleja de la serie de Fourier. Integral de Fourier. Convergencia. Transformada de Fourier. Convolución. Aplicaciones.

9. **Transformada Zeta**

   Definición. Propiedades. Convergencia. Cálculo de transformadas. Transformada inversa. Aplicación a la resolución de ecuaciones en diferencias.

BIBLIOGRAFIA BÁSICA

James, G., *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Pearson Educación, 2002.

Churchill, R. V.; Brown, J. W. y Verhey, R. F., *Variables complejas y sus aplicaciones*, McGraw-Hill, México, 1978.

Churchill, R. V., *Series de Fourier y problemas de contorno*, McGraw-Hill, New York, 1966.

Churchill, R. V., *Operational mathematics*, 2. ed., McGraw-Hill, New York, 1958.

Knopp, K., *Teoría de funciones*, 2. ed., Labor, Barcelona, 1946.

Kreyszig, E., *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, 3a. ed., 2 vols, Limusa, México, 2004.

Markushévich, A.; *Teoría de las funciones analíticas*, 2. ed., 2 vols, Mir, Moscú, 1978.

Moretti, G., *Métodos matemáticos de la física*, Coni, Buenos Aires, 1959.

Wylie, C. R., *Advanced engineering mathematics*, 3. ed., McGraw-Hill, New York, 1966.

FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA
Cronograma 2do. Cuatrimestre 2019

Horario de clases de teoría-practica:

- Lunes de 8:00 a 10:00 hs. Aula: 211 Alem
- Miércoles de 14:00 a 16:00 hs. Aula: 3 Palihue
- Viernes de 14:00 a 16:00 hs. Aula: 3 Palihue

Horario de clases de práctica:

- Lunes de 10:00 a 11:00 hs. Aula: 211 Alem
- Viernes de 16:00 a 17:00 hs. Aula: 3 Palihue

Consultas:
Lunes 11:00 hs. Aula: 211, Alem; Miércoles 16:00 hs (Palihue); Viernes 17:00 hs. Aula: 3 Palihue

AGOSTO	Lun 12	Series numéricas. Convergencia absoluta. Criterios. Integrales Impropias. Definición. Criterios de convergencia.
	Mie 14	Series de Funciones. Convergencia uniforme. Integrales que dependen de un parámetro. Convergencia uniforme. Criterio de Weierstrass.
	Vie 16	Integración y derivación de una función definida por una integral impropia.
	Lun 19	**Feriado**
	Mie 21	Números complejos. Operaciones fundamentales. Geometría en el plano complejo. Regiones. Clasificación de puntos y conjuntos. Rectas y circunferencias. Definición de entorno.
	Vie 23 **T1**	Funciones de una variable compleja. Polinomios. Función Exponencial. Límites.
	Lun 26	Propiedades de límites. Continuidad. Propiedades de funciones continuas.
	Mie 28	Introducción del punto al infinito. Esfera de Riemann. Límites infinitos.
	Vie 30	Diferenciabilidad. Funciones analíticas.
SEPTIEMBRE	Lun 2	Ecuaciones de Cauchy Riemann.Funciones armónicas conjugadas.
	Mie 4	Funciones trigonométricas. Funciones hiperbólicas. Función Logaritmo
	Vie 6 **T2**	Repaso y ejercicios teóricos
	Lun 9	Repaso y ejercicios teóricos
	Mie 11	**Feriado**
	Vie **13**	**Primer Parcial-Coloquio**
	Lun 16	Funciones multivaluadas. Ramas. Funciones trigonométricas inversas. Potencias complejas
	Mie 18	Integral en el campo complejo. Definición. Propiedades.
	Vie 20	Teorema de Cauchy y consecuencias. Primitivas.
	Lun 23	Teorema de Cauchy para dominios múltiplemente conexos.
	Mie 25	Fórmulas integrales de Cauchy. Teorema de Liouville. Teorema de Morera.
	Vie 27 **T3**	Sucesiones. Series numéricas complejas. Series de funciones complejas. Convergencia Uniforme
	Lun 30	Series de Potencias. Desarrollo de Taylor. Círculo de Convergencia.

OCTUBRE	Mie	2		Convergencia absoluta y uniforme de series de potencias.
	Vie	4		Series de Laurent. Puntos singulares. Clasificación
	Lun	7		Ceros y polos. Regla de L´Hopital. Cálculo de residuos.
	Mie	9		Teorema de los residuos. Descomposición en fracciones simples.
	Vie	11	**T4**	Repaso y ejercicios teóricos
	Lun	14		**Feriado**
	Mie	16		Repaso y ejercicios teóricos
	Vie	18		**Segundo Parcial-Coloquio**
	Lun	21		Transformada de Laplace. Definición. Convergencia. Propiedades de la Transformada de Laplace.
	Mie	23		Cálculo de Transformadas. Teoremas Fundamentales. Transformada inversa.
	Vie	25		Resolución de ecuaciones y sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Aplicaciones. Teorema del Valor Final. Funciones periódicas.
	Lun	28		Series de Fourier. Convergencia de las series de Fourier.
	Mie	30		Simetrías: par, impar y media onda. Forma compleja de la serie de Fourier.
NOVIEMBRE	Vie	1	**T5**	Convergencia uniforme. Derivación e integración de una serie de Fourier. Igualdad de Parseval. Espectros en frecuencia.
	Lun	4		Funciones ortogonales. Desarrollos en series de Funciones ortonormales. Series de Ortonormales. Coeficientes de Fourier. Aproximación en media cuadrática.
	Mie	**6**		**Elecciones UNS**
	Vie	8		Transformaciones en el plano complejo. Lineal. Inversión.
	Lun	11		Bilineal. Transformaciones conformes.
	Mie	13		Principio de variación del argumento.
	Vie	15	**T6**	Aplicaciones de Laplace y Fourier
	Lun	**18**		**Feriado**
	Mie	20		Repaso y ejercicios teóricos
	Vie	22		**Tercer Parcial-Coloquio**
	Lun	25		Integral de Fourier. Transformada de Fourier. Convolución. Relaciones entre Fourier y Lapalce. Fórmula de Inversión Compleja de Lapalce.
	Mie	27		Funciones impulsivas. Transformada Z.
	Vie	29		Resolución de Ecuaciones a diferencias.
DIC	Lun	1		**Recuperatorio**

Funciones de Variable Compleja.

Esta guía cubre esencialmente gran parte de las definiciones, lemas y teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja. Se denomina *Guía* y no *Notas de Curso* pues se espera que sus lectores recurran a los textos citados en la bibliografía.

Para la primer parte de la materia se puede utilizar cualquier libro de Cálculo, como por ejemplo:

- *Introducción al cálculo y al análisis matemático.* Courant, Richard; John, Fritz. Vol. 1 y 2. (**517. C833**)
- *Métodos Matemáticos de la física.* Moretti, Gino. (**530. M818**)
- *Matemática superior para ingenieros y físicos.* Sokolnikoff, Ivan S. (**517. So39ma5**)

Series

Definición 1 *Dada una sucesión a_1, a_2, ..., a_n , ... de números. La expresión*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

se llama ***serie numérica****. Los a_n se llaman términos de la serie.*

Sucesión de sumas parciales

Definición 2 *La sucesión de sumas parciales es la suma de los N primeros términos de la serie.*

$$S_N = a_1 + \cdots + a_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

Nota: el símbolo $\sum$ significa “la suma de” o “la serie de”, si no se aclaran los extremos, inferior y superior significa que podrían ser cualesquiera.

Definición 3 *Si existe el límite finito $S = \lim_{N\to\infty} S_N$, se dice que la serie* ***converge*** *y el límite S es la suma de la serie. Si el límite no existe entonces se dice que la serie* ***diverge*** *y no tiene suma.*

- La convergencia no depende de los primeros términos. Por ser un límite importa lo que suceda a partir de un N suficientemente grande.

Condición necesaria

Teorema 1 *Si una serie converge su n-ésimo término tiende a cero cuando n tiende a infinito.*

Corolario: Si el n-ésimo término de una serie no tiende a cero cuando n tiende a infinito, la serie diverge.

Series con términos positivos

Criterio de comparación

Sea $0 \leq a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces:

- Si $\sum b_n$ converge entonces $\sum a_n$ converge.
- Si $\sum a_n$ diverge entonces $\sum b_n$ diverge.

Criterio de D'Alambert

Si para la serie $\sum a_n$, con $a_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$ entonces:

- si $L < 1$ la serie converge.
- si $L > 1$ la serie diverge.

Criterio de Cauchy

Si para la serie $\sum a_n$, con $a_n \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ entonces:

- si $L < 1$ la serie converge.
- si $L > 1$ la serie diverge.

Criterio de comparación con límite del cociente

Teorema 2 *Sean $a_n \geq 0$ y $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$; y sea $A = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, entonces:*

1) Si $A \neq 0$ y $A \neq \infty$, las series $\sum b_n$ y $\sum a_n$ tienen la misma naturaleza (ambas convergen o ambas divergen).

2) Si $A = 0$ y $\sum b_n$ converge entonces $\sum a_n$ converge.

3) Si $A = \infty$ y $\sum b_n$ diverge entonces $\sum a_n$ diverge.

Series alternantes

Las series alternantes son aquellas cuyos términos son alternativamente positivos y negativos, es decir $\sum(-1)^n a_n$, con $a_n > 0$.

Teorema de Leibniz

Teorema 3 *Si una serie alternante* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$*, es tal que sus términos* a_n *son estrictamente decrecientes, y* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*, entonces la serie converge, su suma es positiva y no supera el primer término* a_0*.*

Series con términos positivos y negativos.
Convergencia absoluta y condicional

Definición 4 *La serie* $\sum a_n$ ***converge absolutamente*** *si converge la serie* $\sum |a_n|$ *.*

Teorema 4 *Si la serie* $\sum |a_n|$ *converge entonces la serie* $\sum a_n$ *también converge.*

Definición 5 *Si la serie* $\sum a_n$ *converge y la serie* $\sum |a_n|$ *diverge entonces se dice que la serie* $\sum a_n$ ***converge condicionalmente****.*

- La suma de una serie absolutamente convergente no depende del orden de sus términos.

Análisis de Convergencia

Conviene proceder en el análisis utilizando los criterios en el siguiente orden:

1. Condición necesaria.
2. Convergencia absoluta: criterios de series de términos positivos (comparación, D'Alambert, Cauchy).
3. Convergencia condicional: Leibniz, sumas parciales.

Propiedades

Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series convergentes con suma A y B respectivamente, entonces:

- $\sum (a_n + b_n)$ converge y su suma es $A + B$.
- Si c es un número real, $\sum c\, a_n$ converge y su suma es $c\, A$.

Integrales impropias

Definición 6 *Dada una integral*

$$\int_a^b f(x)dx$$

en cualquiera de los casos donde:

a) el intervalo de integración no tiene longuitud finita,

b) la función $f(x)$ no es acotada en (a, b),

c) una combinación de los dos casos anteriores,

diremos que la integral es una ***integral impropia****.*

Definición 7 *Decimos que $f(x)$ es seccionalmente continua, o continua a tramos, en el intervalo $[a, b]$ si tiene a lo sumo un número finito de discontinuidades tipo salto (existen los límites laterales).*

Definición 8 *Si $f(x)$ es continua a tramos en $[a, R]$, $\forall R > a$ y existe el siguiente límite*

$$L = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx$$

diremos que la integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente y que L es su valor y escribimos $\int_a^\infty f(x)\,dx = L$. En caso contrario se dirá que la integral es divergente.

Teorema 5 *Una condición necesaria y suficiente para que converja $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es que: para todo $\varepsilon > 0$ existe un número positivo N tal que*

$$\left|\int_p^q f(x)\,dx\right| < \varepsilon \quad \forall p, q > N.$$

Criterio de la integral

Teorema 6 *Sean los términos de la serie $\sum a_n$ positivos y no crecientes,es decir $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$, y sea $f(x)$ una función continua monótona decreciente tal que:*

$$f(1) = a_1,\ f(2) = a_2,\ \ldots f(n) = a_n,\ \ldots$$

a) Si la integral impropia $\int_1^\infty f(x)\,dx$ converge, es convergente también la serie.

b) Si la integral impropia $\int_1^\infty f(x)\,dx$ diverge, es divergente también la serie.

Definición 9 *Se dice que la integral impropia* $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ *es convergente si existe y es finito el límite*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{b} f(x)\,dx$$

Definición 10 *Se dice que la integral impropia* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *es convergente si existe y es finito el límite doble*

$$\lim_{P,R\to\infty} \int_{-P}^{R} f(x)\,dx$$

lo cual es equivalente a pedir que las dos integrales impropias siguientes sean convergentes

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx \quad y \quad \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx,$$

donde a es un número real cualquiera.

Definición 11 *La expresión* $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$ *se llama Valor Principal de Cauchy de la integral* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *y lo notaremos como V.P.C.* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Este valor puede existir aún cuando la integral impropia es divergente (Ej. $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$).

Integrales impropias en las que el integrando no es acotado

Supondremos ahora que $c \in [a,b]$ y que $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = \infty$.

Definición 12 *Se dirá que* $\int_a^b f(x)\,dx$ *es convergente si existen y son finitos los siguientes límites.*
1) $c = a$, $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$
2) $c = b$, $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$
3) $c \in (a,b)$, $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon_1\to 0^+} \int_{a}^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim\limits_{\varepsilon_2\to 0^+} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx$

Definición 13 *En el tercer caso de la definición anterior también se denomina Valor Principal de Cachy al límite*

$$V.P.C. \int_a^b f(x)\,dx = \lim \varepsilon \to 0^+ \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \right)$$

Operaciones válidas con integrales impropias

En las siguientes integrales debe considerarse que alguno de los extremos puede ser infinito o que el integrando no esté acotado, es decir vale para cualquier tipo de integral impropia.

1. Vale la fórmula

$$\int_a^b \lambda\, f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx$$

2. La ecuación

$$\int_a^b \left(f_1(x) + f_2(x)\right)\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx + \int_a^b f_2(x)\, dx$$

   no siempre es cierta. Es claro que si las integrales de la derecha convergen, la de la izquierda también y vale la igualdad.

3. Fórmula de integración por partes

$$\int_a^b f_1(x)\, f_2'(x)\, dx = f_1(x)\, f_2(x)|_a^b - \int_a^b f_2(x)\, f_1'(x)\, dx$$

   Esta ecuación es válida si cualquier par de estas expresiones existen

Definición 14 *Si $\int_a^b |f(x)|\, dx$ es convergente se dice que $f(x)$ es* ***absolutamente integrable*** *en ese intervalo y que $\int_a^b f(x)\, dx$* ***converge absolutamente****.*

Criterio de comparación

Teorema 7 *Sean f y g dos funciones integrables sobre todo intervalo cerrado y acotado en $[a, \infty)$ tales que*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \textit{para } x \geq a.$$

Se tiene:
1) Si $\int_a^\infty g(x)\, dx$ converge entonces $\int_a^\infty f(x)\, dx$ converge.
2) Si $\int_a^\infty f(x)\, dx$ diverge entonces $\int_a^\infty g(x)\, dx$ diverge.

Teorema 8 *Sean f y g dos funciones integrables sobre todo intervalo cerrado y acotado en $[a, \infty)$ tales que $f(x) \geq 0$ y $g(x) > 0$ para $x \geq a$. Sea $A = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, entonces:*
1) Si $A \neq 0$ y $A \neq \infty$, las integrales $\int_a^\infty f(x)\, dx$ y $\int_a^\infty g(x)\, dx$ tienen la misma naturaleza.
2) Si $A = 0$ y $\int_a^\infty g(x)\, dx$ converge entonces $\int_a^\infty f(x)\, dx$ converge.
3) Si $A = \infty$ y $\int_a^\infty g(x)\, dx$ diverge entonces $\int_a^\infty f(x)\, dx$ diverge.

Aclaración: El criterio de comparación y el teorema anterior (comparación por limite del cociente) también valen para integrales impropias del segundo tipo (integrandos no acotados). En ese caso el límite se calcula en el punto del intervalo de integración en el cual el integrando no es acotado.

Ejercicio 1 Demostrar el teorema anterior (utilice definición de límite y criterio de comparación).

En el siguiente teorema y definición debe considerarse que alguno de los extremos puede ser infinito o que el integrando no esté acotado.

Teorema 9 *Si* $\int_a^b |f(x)|\, dx$ *es convergente entonces* $\int_a^b f(x)\, dx$ *también es convergente.*

Definición 15 *Si* $\int_a^b |f(x)|\, dx$ *es divergente y* $\int_a^b f(x)\, dx$ *es convergente se dice que* $\int_a^b f(x)\, dx$ ***converge condicionalmente****.*

Series de funciones

Definición 16 *Una serie se llama serie de funciones si sus términos son funciones de una variable o parámetro, que lo indicaremos con la letra* x, *es decir:*

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

es una serie de funciones. Dándole valores a x, *obtenemos diferentes series numéricas que pueden ser convergentes o divergentes.*

Definición 17 *El conjunto de valores de* x *para los cuales una serie de funciones* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge se llama* ***dominio de convergencia*** *de esa serie. En el dominio de convergencia su suma es una cierta función de* x, $S(x)$.

Definición 18 *En el dominio de convergencia* $S(x) = S_N(x) + r_N(x)$, *donde* $r_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)$ *se llama* ***resto*** *de la serie.*

Teorema 10 *En el dominio de convergencia el resto* $r_N(x)$ *de una serie convergente tiende a cero cuando* N *tiende a infinito.*

Convergencia puntual

Definición 19 *La serie* $\sum f_n(x)$ *se llama* ***convergente*** *(o puntualmente convergente) en un intervalo o conjunto de puntos* $P \subset \mathbb{R}$, *si en cada* $x \in P$, *a todo número positivo* $\varepsilon > 0$, *arbitrariamente pequeño, corresponde un número* $N(\varepsilon, x)$ *tal que para todos los* $n > N$ *se cumple que*

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon.$$

Convergencia uniforme.

Definición 20 *Sea* P *un intervalo o un conjunto de puntos en* $\mathbb{R}$. *La serie* $\sum f_n(x)$ *se llama* ***uniformemente convergente*** *en el conjunto* P, *si a todo número positivo* $\varepsilon > 0$ *arbitrariamente pequeño corresponde un número* $N(\varepsilon)$ *tal que para todos los* $n > N$ *y* $\forall x \in P$ *se cumple que*

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon.$$

Test de Weierstrass

Teorema 11 *Sea una serie de funciones* $\sum f_n(x)$. *Si existe una serie numérica convergente,* $\sum a_n$, *con términos positivos, tales que*

$$|f_n(x)| \leq a_n$$

para todos los valores de $x \in P$, *entonces la serie de funciones converge* ***absoluta*** *y* ***uniformemente*** *en* P.

Teorema 12 *La suma de una serie de funciones continuas que converge uniformemente en un cierto intervalo* $[a, b]$ *es una función continua en ese intervalo.*

Integrales impropias paramétricas

Sea $S^* = \{(x,t),\, x \in P \subset \mathbb{R}, t \in [c, +\infty)\}$. Sea $f : S^* \to \mathbb{R}$ y supongamos que para cada $x \in P$ la integral impropia $\int_c^\infty f(x,t)\,dt$ es convergente, entonces sobre el conjunto P se puede definir la siguiente función

$$F(x) = \int_c^\infty f(x,t)\,dt$$

Convergencia puntual

Definición 21 *La integral $\int_c^\infty f(x,t)\,dt$ converge puntualmente sobre un conjunto $P \subset \mathbb{R}$, a la función $F(x)$, si en cada $x \in P$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe un $R_0(\varepsilon, x) > c$ tal que*

$$\left| F(x) - \int_c^R f(x,t)\,dt \right| < \varepsilon \quad \forall R > R_0.$$

Convergencia uniforme

Definición 22 *Supongamos que $\int_c^\infty f(x,t)\,dt$ converge puntualmente a $F(x)$ en el conjunto de puntos P. La integral converge uniformemente sobre el conjunto P si para todo $\varepsilon >$ o existe un $R_0(\varepsilon) > c$ tal que*

$$\left| F(x) - \int_c^R f(x,t)\,dt \right| < \varepsilon \quad \forall x \in P \text{ y } \forall R > R_0.$$

Criterio M de Weierstrass

Teorema 13 *Supongamos que existe $\int_c^R f(x,t)\,dt$ para todo $R \geq c$ y todo $x \in P$. Si existe una función positiva $M(t) \geq 0$ cuando $t \geq c$ tal que*

$$|f(x,t)| \leq M(t) \quad \textit{para } x \in P \textit{ y todo } t \geq c$$

con $\int_c^\infty M(t)\,dt$ convergente, entonces la integral $\int_c^\infty f(x,t)\,dt$ es absoluta y uniformemente convergente sobre el conjunto P.

Este criterio también es aplicable en integrales impropias del segundo tipo (integrandos no acotados).

Aplicaciones de la convergencia uniforme

Sea $F(x) = \int_c^\infty f(x,t)\,dt$ una integral impropia y $S^* = \{(x,t),\ x \in [a,b], t \in [c,+\infty)\}$, se tienen los siguientes tres teoremas:

Teorema 14 *Sea f continua en S^* y supongamos que la integral $\int_c^\infty f(x,t)\,dt$ converge uniformemente en $[a,b]$. Entonces F es continua en $[a,b]$.*

Teorema 15 *Si f es continua en la banda S^* y $\int_c^\infty f(x,t)\,dt$ converge uniformemente en $[a,b]$, entonces*

$$\int_a^b \int_c^\infty f(x,t)\,dtdx = \int_c^\infty \int_a^b f(x,t)\,dxdt$$

es decir podemos intercambiar el orden.

Teorema 16 *Si*
1) f y $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ son continuas en la banda S^*.
2) $\int_c^\infty f(x,t)\,dt$ converge puntualmente sobre $[a,b]$.
3) $\int_c^\infty \dfrac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,dt$ converge uniformemente sobre $[a,b]$.
Entonces $F(x) = \int_c^\infty f(x,t)\,dt$ es diferenciable sobre $[a,b]$ y

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_c^\infty f(x,t)\,dt = \int_c^\infty \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,dt$$

Estos tres últimos teoremas siguen valiendo con condiciones más generales sobre la continuidad de los integrandos, por ejemplo se puede demostar que $f(x,t)$ y $\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial x}$ pueden no ser continuas en todo S^*, si tienen la forma

$$\phi(x,t)\psi(t)$$

donde es $\phi(x,t)$ continua en S^* y $\psi(t)$ es acotada e integrable (por ej. continua a tramos) en todo intervalo cerrado contenido en $[c,+\infty)$, los tres teoremas se siguen verificando, es decir $F(x)$ es continua y se puede intercambiar el orden de integración y también derivar la integral impropia.

Algunos ejemplos de integrales impropias y series.

- La integral impropia $\int_a^\infty f(x)\,dx$ puede ser convergente aún cuando el integrando no tienda cero. La integral $\int_a^\infty \operatorname{sen} x^2\,dx$ converge condicionalmente y el integrando no tiene límite.

- Series no uniformemente convergentes con funciones sumas discontinua:

  - La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^n}$ converge sobre toda la recta real. Su suma es discontinua en $x = 0$.
  - La serie $x + x(x-1) + x^2(x-1) + \cdots + x^n(x-1) + \cdots$ converge a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

- La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(x\sqrt{n}\,e^{-nx^2} - x\sqrt{n+1}\,e^{-(n+1)x^2} \right)$$

  es un ejemplo de serie no uniformemente convergente en el intervalo $0 \leq x \leq 1$, cuya suma sin embargo es una función continua.

- La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2+n}$$

  no es absolutamente convergente pero es uniformemente convergente. (Notar que este resultado no se puede obtener del criterio de Weierstrass).

Ejercicio 2 Estudie la convergencia uniforme de las siguientes integrales impropias en el intervalo $\alpha \in [2,5]$. La función a la cual convergen allí ¿es continua? ¿Es posible ampliar dicho intervalo?

$$a)\ \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \qquad b)\ \int_0^\infty e^{-\alpha\, x} dx \qquad c)\ \int_0^\infty e^{-\alpha\, x} \operatorname{sen} x\, dx$$

Ejercicio 3 Sea $F(s)$ una función definida por medio de una integral paramétrica:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt,$$

donde $f(t)$ es una función continua a tramos y se sabe además que $|f(t)| \leq e^{3t}$ $\forall t \in [0, +\infty)$.

1. Encuentre el dominio de definición de la función $F(s)$, es decir para qué valores de s queda bien definida dicha función por medio de la integral impropia.

2. Encuentre un intervalo donde $F(s)$ sea continua.

3. Encuentre un intervalo donde se verifique:

$$F'(s) = -\int_0^\infty e^{-st} t f(t) dt.$$

Funciones de Variable Compleja

Bibliografía

- *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería.* James, G.,Pearson Educación
- *Variables complejas y sus aplicaciones.* Churchill, Ruel V.; Brown, James W.; Verhey, Roger F. McGraw-Hill. México (**517.8. C473-2**).
- *Teoría de funciones de variable compleja.* Churchill, Ruel V. McGraw-Hill. New York. (**517.8. C473-1a2**).
- *Matemáticas avanzadas para ingeniería. 2.* Kreyszig, Erwin. Limusa. México. (**517. K889-2 / 517. K889-1/ 517. K889**).

Regiones en el plano complejo

Definición 23 *Un entorno de radio ε de un punto z_0, es el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$ que verifica*

$$|z - z_0| < \varepsilon.$$

Definición 24 *Un entorno reducido de radio ε de un punto dado z_0, es el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$ que verifica*

$$0 < |z - z_0| < \varepsilon.$$

Definición 25 *Dado un conjunto de puntos $S \subset \mathbb{C}$, un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es un punto:*

- ***interior*** *del conjunto S siempre que exista algún entorno de z_0 cuyos puntos sean todos de S.*
- ***exterior*** *del conjunto S, cuando existe un entorno suyo que no contiene puntos de S.*

- ***frontera*** *del conjunto S, cuando cuyos entornos contienen tanto puntos de S como puntos que no están en S.*
- ***de acumulación*** *del conjunto S, si cada entorno reducido de z_0 contiene al menos un punto de S.*

Definición 26 *Un conjunto es **abierto** cuando todos sus puntos son interiores.*

Definición 27 *Un conjunto es **cerrado** si su complemento es abierto (contiene todos sus puntos frontera).*

Definición 28 *Un conjunto abierto S es **conexo** si cada par de puntos z_1 y z_2 en él se pueden unir por una línea poligonal, consistente de un número finito de segmentos sucesivos, que está enteramente contenida en S.*

Definición 29 *Un conjunto abierto y conexo se llama **dominio.***

Definición 30 *Un dominio unido a algunos, todos o ninguno de sus puntos frontera se llama **región**.*

Definición 31 *Un conjunto S es **acotado** si todo punto de S está dentro de un círculo ($|z| \leq R$, $\forall\, z \in S$).*

Funciones

Definición 32 *Sea S un conjunto de número complejos. Una función f definida sobre S es una regla que asigna a cada z en S un número complejo w. Es decir dado $S \subset \mathbb{C}$, sobre el cual definimos la función $f : S \to \mathbb{C}$, y dicha asignación la expresamos así:*

$$w = f(z).$$

El conjunto S se llama "dominio de definición de f ".

Límites

Definición 33 *Se dice que el límite de $f(z)$ cuando z tiende a z_0 es w_0, o sea $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$, cuando para cada número $\varepsilon > 0$, $\exists$ un número $\delta > 0$ tal que:*

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Teorema 17 *Supongamos que* $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, $z_0 = x_0 + i\,y_0$, *y* $w_0 = u_0 + i\,v_0$. *Entonces*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0 \end{cases}.$$

Teorema 18 *Supongamos que* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$ *y* $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = h_0$.

Entonces

- $\lim\limits_{z\to z_0} [f(z) + g(z)] = w_0 + h_0$.
- $\lim\limits_{z\to z_0} [f(z)\,g(z)] = w_0\,h_0$.
- *Si* $h_0 \neq 0$, $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{w_0}{h_0}$.

Propiedades

1. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0 \Rightarrow \lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = |w_0|$.
2. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = 0$.
3. $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = w_0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{r\to 0} f(re^{i\,\theta}) = w_0$ uniformemente en θ.
4. Si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = 0$ y $|g(z)| < M$ en un entorno de $z_0 \Longrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)\,g(z) = 0$.
5. Si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$ y $\lim\limits_{w\to w_0} g(w) = h_0 \Rightarrow \lim\limits_{z\to z_0} g(f(z)) = \lim\limits_{w\to w_0} g(w) = h_0$
6. Si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0 \Rightarrow$ por cualquier dirección que se acerque a z_0, la función $f(z)$ tiene el mismo límite w_0.

Observación: En la propiead 3, cuando se calcula un límite usando forma polar para $z \to 0$, si $|f(z) - w_0| \leq g(r)$ y $\lim\limits_{r\to 0} g(r) = 0$, entonces $\lim\limits_{r\to 0} f(re^{i\,\theta}) = w_0$ uniformemente en θ.

Ejercicio 4 Sea $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, $z_0 = x_0 + i\,y_0$, y $w_0 = u_0 + i\,v_0$.

1. Muestre que:

   a) $|u(x,y) - u_0| \leq |f(z) - w_0|$.

   b) $|v(x,y) - v_0| \leq |f(z) - w_0|$.

   c) $|f(z) - w_0| \leq |u(x,y) - u_0| + |v(x,y) - v_0|$.

   d) Un entorno circular en $\mathbb{R}^2$ en el punto (x_0, y_0) [utilizado en funciones de variables reales] es equivalente a un entorno de z_0 en el plano complejo $\mathbb{C}$.

2. Usando (1.) pruebe el teorema **17**.
3. Pruebe el teorema **18** usando el teorema **17** y propiedades de límites de funciones de variables reales.
4. Pruebe las propiedades de la página anterior utilizando la definicón de límite.

Límites y el punto del Infinito

Muchas veces es necesario considerar junto con el plano complejo el concepto o *punto del infinito*. A este conjunto $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se le llama *plano complejo extendido*. Para incorporar la noción del punto del infinito es conveniente utilizar la esfera de Riemann como se detalla a continuación:

Esfera de Riemann

El plano complejo pasa por el ecuador de una esfera unidad centrada en $z = 0$. A cada punto z del plano le corresponde exactamente un punto P en la superficie de la esfera. se determina por la intersección de la recta que pasa por el polo Norte y el punto z con la superficie de la esfera. A cada punto P de la esfera le corresponde un punto z del plano, excepto al polo Norte. Haciendo corresponder al polo Norte el punto del infinito, obtenemos una correspondencia $1 \leftrightarrow 1$ entre los puntos de la esfera y los del plano extendido

$$\textit{Esfera de Riemann} \leftrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Para cada $\varepsilon > 0$, pequeño, los puntos del plano complejo exteriores al círculo $|z| > 1/\varepsilon$ corresponden a puntos de la esfera próximos al polo Norte.

Llamaremos al conjunto $|z| > 1/\varepsilon$ un entorno ε de ∞.

Definición 34 *La afirmación* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$ *significa que para cada* $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ *tal que* $|f(z)| > 1/\varepsilon$, *siempre que* $0 < |z - z_0| < \delta$. *Es decir*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

Ejercicio 5 1. En forma análoga a la definición anterior muestre que:

i) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to 0} f(\frac{1}{z}) = w_0$. *ii)* $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{f(\frac{1}{z})} = 0$.

2. Muestre que: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$.

Continuidad

Definición 35 *Una función es continua en un punto z_0 si satisface las siguientes tres condiciones*

- existe $\lim_{z \to z_0} f(z)$
- existe $f(z_0)$
- $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Es decir para cada $\varepsilon > 0$, $\quad \exists\, \delta > 0$ tal que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, siempre que $|z - z_0| < \delta$.

Definición 36 *Una función se dice que es continua en una región R si lo es en todos sus puntos.*

Teorema 19 *Una función $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ es continua en un punto $z_0 = x_0 + i\, y_0$ si solo si sus funciones componentes u y v son funciones continuas.*

Propiedades

- Si dos funciones son continuas en un punto, su suma y su producto también lo son, su cociente es continuo siempre que el denominador no se anule.
- Un polinomio es continuo en todo el plano.
- La composición de funciones continuas es continua.
- Si una función $f(z)$ es continua y no se anula en un punto $z_0 \Rightarrow f(z) \neq 0$ en algún entorno de ese punto.
- Una función $f(z)$ continua en una región cerrada y acotada R, es acotada en R y $|f(z)|$ alcanza su máximo en ella. Es decir existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(z)| \leq M \ \forall z \in R$.

Ejercicio 6 Demuestre el teorema **19** [sugerencia: utilice el teorema **17**].

Derivadas

Definición 37 *Sea f una función cuyo dominio de definición contiene un entorno de z_0. La derivada de f en z_0, $f'(z_0)$, se define por:*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

supuesto que el límite existe. La función f se dice diferenciable en z_0 cuando existe su derivada.

Si $\Delta z = z - z_0$, se obtiene una expresión equivalente:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

En forma similar si $w = f(z)$ y llamando $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$,

$$f'(z) = \frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Teorema 20 *Si una función f es derivable en un punto z_0 entonces dicha función es continua en ese punto. Es decir si $\exists\, f'(z_0) \Rightarrow \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.*

Ejercicio 7 Muestre que:

i) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) = 0.$

ii) $\lim\limits_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) = \lim\limits_{z \to z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) \right).$

iii) Usando *i*) y *ii*) muestre el teorema **20**.

Fórmulas de derivación

- $\dfrac{d}{dz} c = 0, \quad c$ es una constante compleja.
- $\dfrac{d}{dz} z = 1.$
- $\dfrac{d}{dz} c f(z) = c f'(z).$
- $\dfrac{d}{dz} [f(z) + g(z)] = f'(z) + g'(z).$
- $\dfrac{d}{dz} [f(z).g(z)] = f(z) g'(z) + f'(z) g(z).$

- Cuando $g(z) \neq 0$, $\quad \dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right] = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$.

- Si $w = f(z)$ y $h = g(w)$, $\quad \dfrac{dh}{dz} = \dfrac{dh}{dw}\dfrac{dw}{dz}$.

- $\dfrac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}$ (n entero positivo, vale para negativo si $z \neq 0$).

Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Teorema 21 (**Condiciones necesarias**) *Supongamos que $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ y que existe $f'(z)$ en el punto $z_0 = x_0 + i\,y_0$. Entonces las derivadas parciales primeras de u y v existen en (x_0, y_0) y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en él.*

$$\left.\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}\right\} \quad \textit{en } z = z_0.$$

Además $f'(z_{0)}$ se puede expresar como $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i\,v_x(x_0, y_0)$.

Teorema 22 (**Condiciones suficientes**) *Sea la función $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ definida en un entorno ε de un punto $z_0 = x_0 + i\,y_0$. Supongamos que las derivadas parciales primeras de las funciones u y v con respecto a x e y existen en todo punto del entorno y son continuas en (x_0, y_0). Entonces si esas derivadas parciales satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en (x_0, y_0), existe la derivada de f en z_0.*

Teorema 23 (**Condiciones necesarias y suficientes**) *Sea la función $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ definida en un entorno ε de un punto $z_0 = x_0 + i\,y_0$. Existe la derivada de f en z_0, si y sólo si u y v son diferenciables en (x_0, y_0) y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en (x_0, y_0).*

Ejercicio 8 Sea $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ una función definida en un entorno del punto $z_0 = x_0 + i\,y_0$.

1. Sabiendo que $f(z)$ es derivable en z_0,calcule las derivadas direccionales de $f(z)$ en z_0, según las direcciones:

   a) $\Delta x = 0$ y $\Delta y \to 0$

   b) $\Delta y = 0$ y $\Delta x \to 0$

2. Usando el punto anterior pruebe el teorema **21**.

3. Sean $u(x,y)$ y $v(x,y)$ dos funciones diferenciables en (x_0,y_0) [recuerde que:

$$\begin{aligned}\Delta u(x_0,y_0) &= u_x(x_0,y_0)\Delta x + u_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\\ \Delta v(x_0,y_0) &= v_x(x_0,y_0)\Delta x + v_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_2\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\end{aligned}$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando$(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$]. Además sea $w=f(z)$.

Muestre que:

a) $\Delta w = f(z_0+\Delta z)-f(z_0) = \Delta u(x_0,y_0)+i\,\Delta v(x_0,y_0)$

b) $\Delta w = (u_x+i\,v_x)\Delta x + (v_y - i\,u_y)i\Delta y + (\varepsilon_1+i\varepsilon_2)|\Delta z| \quad$ [en el punto (x_0,y_0)].

c) Si además se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann, entonces

$$\text{existe } \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} \quad \text{en el punto } z_0.$$

Ecuaciones de Cauchy Riemann en Coordenadas polares

$$\left.\begin{aligned} u_x &= v_y\\ u_y &= -v_x\end{aligned}\right\} \text{ en } z=z_0 \iff \left.\begin{aligned} r\,u_r &= v_\theta\\ u_\theta &= -r\,v_r\end{aligned}\right\} \text{ en } z=z_0.$$

Además $u_x+i\,v_x = e^{-i\theta}(u_r+i\,v_r)$.

Funciones Analíticas (Holomorfas)

Definición 38 *Una función de variable compleja se dice analítica (o holomorfa) en un punto si es derivable en el punto y en el entorno.*

Definición 39 *Una función de variable compleja se dice analítica en un conjunto abierto si tiene derivada en todo punto de ese abierto.*

Definición 40 *Si una función f no es analítica en un punto z_0 pero es analítica en algún punto de todo entorno de z_0, se dice que z_0 es un **punto singular** o una **singularidad** de f.*

Teorema 24 *Si dos funciones continuas $u(x,y)$ y $v(x,y)$ tienen derivadas parciales primeras continuas que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en algún dominio D, entonces la función compleja $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ es analítica en D.*

Observación: Dada una función $f(z) = u(x, y)+i\, v(x, y)$, si las ecuaciones de Cauchy Riemman se verifican en un punto, esto no alcanza para asegurar que exista la derivada de f en ese punto (teoremas 21 y 22). ¿Si estas ecuaciones se verifican en todo un dominio D, se podrá asegurar que es analítica en D? J.D. Gray y A. Morris demostraron que si f es continua en un dominio D, existen las derivadas parciales u_x, u_y, v_x, $v_y$en D, y verifican las ecuacioes de Cauchy-Riemann en D, entonces f es analñitica en D.

Propiedades de funciones analíticas

- Si dos funciones son analíticas en un dominio, su suma y su producto también lo son, su cociente es analítico siempre que el denominador no se anule.
- La composición de funciones analíticas es analítica.
- Un polinomio es analítico en todo el plano.

Teorema 25 *Si una función f tiene derivada nula en todo punto de un dominio D, entonces f es constante en D.*

Ejercicio 9 Sea $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ una función definida en un dominio D.

1. Pruebe el teorema **24** [sugerencia: use el teorema **22**].
2. Si $f(z)$ tiene derivada nula en todo punto del dominio D (=abierto y conexo). Muestre que:

    a) f es analítica en D.

    b) $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ en D.

    c) u y v son constantes en D.

Teorema 26 *Si una función $f(z) = u(x, y)+i\, v(x, y)$ es analítica en un dominio D, sus funciones componentes u y v son armónicas en D.*

En el caso que se verifique el teorema anterior, las funciones u y v se llaman **armónicas conjugadas**. Recordar que una función real h de dos variables x e y se dice armónica en un dominio del plano $x\, y$, si sobre ese dominio tiene derivadas parciales continuas de primer y segundo orden y satisface la ecuación de Laplace: $h_{xx} + h_{yy} = 0$. Si h se expresa en coordenadas polares (r e θ), esa misma ecuación resulta: $h_{rr} + \frac{1}{r}h_r + \frac{1}{r^2}h_{\theta\theta} = 0$.

Ejercicio 10 Sea $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ una función analítica en un dominio D.

a) Sean $u(x,y)$ y $v(x,y)$ dos funciones con derivadas parciales continuas de primer y segundo orden en todo D. Muestre que en todo punto de D se verifica que:

$$\begin{array}{lll} (a)\ u_{xx} = v_{yx} & (c)\ v_{xx} = -u_{yx} & (e)\ u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ (b)\ u_{yy} = -v_{xy} & (d)\ v_{yy} = u_{xy} & (f)\ v_{xx} + v_{yy} = 0 \end{array}$$

b) Pruebe la equivalencia entre las condiciones de Cauchy Riemann en coordenadas polares y cartesianas.

Funciones Elementales

Vamos a estudiar funciones de una variable compleja que se reducen a las funciones elementales del cálculo real cuando $z = x + i\,0$.

Función exponencial

$$e^z = e^{x+i\,y} = e^x(\cos y + i\ \mathrm{sen}\, y)$$

- La función exponencial es analítica en todo el plano.
- Cuando $y = 0$, $e^{x+i\,0} = e^x$.
- Cuando $x = 0$, $e^{i\,y} = (\cos y + i\ \mathrm{sen}\, y)$, fórmula de Euler.
- $e^z = e^{x+i\,y} = e^x e^{i\,y}$.
- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.
- $|e^z| = e^x$.
- $\arg(e^z) = y + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- $e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.
- $e^{z+2\pi\,i} = e^z$. La función exponencial es periódica con periodo imaginario puro de $2\pi\,i$.

Logaritmo general

$$\log(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi\, i, k \in \mathbb{Z}.$$

Es una función multivaluada, su valor principal es para $k = 0$

Logaritmo principal

$$\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$$

- Si $\mathrm{Arg}(z)$ se restringe al intervalo $(\alpha, \alpha + 2\pi)$, es decir $\alpha < \mathrm{Arg}(z) < \alpha + 2\pi$, la función $\mathrm{Log}z$ es univaluada y continua. (en $\theta = \alpha$ es discontinua)
- En el dominio $|z| > 0$ y $\alpha < \mathrm{Arg}(z) < \alpha + 2\pi$ es analítica y $\frac{d}{dz}(\mathrm{Log}z) = \dfrac{1}{z}$.

Nota: En algunos textos se considera que la función argumento principal (Arg()) toma valores únicamente en el intervalo $(-\pi, \pi]$, en este curso se deja libertad para definirlo en la forma más adecuada para cada caso particular. Esto requiere especificar su definición cada vez que se lo utilice. La función argumento general (arg())es una función multivaluada (nótese que la escribimos en minúscula), que la podemos expresar a partir de cualquier definición de un argumento principal: $\arg(z) = \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi$, donde $k \in \mathbb{Z}$.

Funciones Trigonométricas e Hiperbólicas

$$\mathrm{sen}z = \frac{e^{i\,z} - e^{-i\,z}}{2\,i} \qquad \mathrm{senh}z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

$$\cos z = \frac{e^{i\,z} + e^{-i\,z}}{2} \qquad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

- Son funciones enteras

$$\frac{d}{dz}(\mathrm{sen}\, z) = \cos z \qquad \frac{d}{dz}(\mathrm{senh}z) = \cosh z$$

$$\frac{d}{dz}(\cos z) = -\mathrm{sen}z \qquad \frac{d}{dz}(\cosh z) = \mathrm{senh}z$$

- Algunas propiedades

$$\begin{aligned} \mathrm{sen}(-z) &= -\mathrm{sen} z & \mathrm{sen}(i\,z) &= i\mathrm{senh} z \\ \cos(-z) &= \cos z & \cos(i\,z) &= \cosh z \end{aligned}$$

- Son funciones periódicas

$$\begin{aligned} \mathrm{sen}(z+2\pi) &= \mathrm{sen} z & \mathrm{senh}(z+2\pi\,i) &= \mathrm{senh} z \\ \cos(z+2\pi) &= \cos z & \cosh(z+2\pi\,i) &= \cosh z \end{aligned}$$

- Funciones tangente y tangente hiperbólica:

$$\tan z = \frac{\mathrm{sen} z}{\cos z}$$

$$\tanh z = \frac{\mathrm{senh} z}{\cosh z}$$

Funciones multivaluadas

Definición 41 *Una **rama** o determinación de una función multivaluada f es cualquier función univaluada F, que sea analítica en algún dominio donde en cada punto z, el valor de $F(z)$ es uno de los valores de $f(z)$.*

- la función $\mathrm{Log} z$ es una rama de $\log z$ (la que llamamos principal, pero existen otras infinitas determinaciones particulares o ramas).

Definición 42 *Un **corte** de una función multivaluada f es una porción de curva (o recta) que se escoge con el objeto de definir una rama F. Los puntos sobre el corte de f son puntos singulares de F, y cualquier punto que es común a todos los cortes posibles de f se llama **punto de ramificación**.*

- el rayo $\theta = \alpha$ es un corte de $\log z$, con $\alpha < \mathrm{Arg}(z) < \alpha + 2\pi$.
- el origen y el ∞ son puntos de ramificación del $\log z$.
- si recorremos una curva cerrada simple que contenga un punto de ramificación, y en cada punto elegimos una rama de tal manera que la variación de la función sobre la curva sea en forma continua, cuando se regresa al punto inicial, el valor de la función es diferente, "está en otra rama".

Exponentes complejos

$$z^c = e^{c \log z}$$

Funciones trigonométricas inversas

$$\begin{aligned}
\operatorname{arcsen} z &= \frac{1}{i} \log \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right) \\
\arccos z &= \frac{1}{i} \log \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right) \\
\arctan z &= \frac{i}{2} \log \frac{1 - iz}{1 + iz} = \frac{i}{2} \log \frac{i + z}{i - z}
\end{aligned}$$

Ejercicio 11 Funciones multivaluadas.

1. Encuentre una rama $\log z$ que sea analítica en $\operatorname{Im}(z) < 0$ y tal que $Log(1) = 4\pi\, i$.

2. Encuentre dos ramas de $\sqrt{z}$ que sean iguales en el primer cuadrante y tomen diferentes valores en el tercer cuadrante.

3. ¿Cuáles son los puntos de ramificación de $\arctan z$?

Integrales de Funciones de Variable Compleja

Con el objeto de introducir integrales de $f(z)$ de modo sencillo, consideremos primero derivadas e integrales de funciones complejas $w(t)$ de una variable real t.

$$\begin{aligned} w &= w(t) \quad w:\mathbb{R}\to\mathbb{C} \qquad (1) \\ w(t) &= u(t)+i\,v(t) \end{aligned}$$

u y v son funciones reales $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Definición 43 *La derivada $w'(t)$ o $\frac{dw}{dt}$ de la función (1) se define como*

$$w'(t) = u'(t) + i\,v'(t)$$

supuesto que existe cada una de las derivadas u' y v' en t.

Contornos

Definición 44 *Un conjunto C de puntos $z=(x,y)$ en el plano complejo se dice que constituye un **arco** si $x=x(t)$, $y=y(t)$, $a\le t\le b$, donde $x(t)$ e $y(t)$ son funciones continuas del parámetro t*

$$z = z(t) = x(t) + i\,y(t) \quad t\in[a,b].$$

- El arco C es un **arco simple**, o arco de Jordan, si no se corta a sí mismo. $z(t_1)\neq z(t_2)$ cuando $t_1\neq t_2$, $t_1,t_2\in(a,b)$.
- Cuando $z(a)=z(b)$, decimos que C es una **curva cerrada.** (Si en los extremos es el único punto que se repite decimos que C es una **curva cerrada simple**).
- Si $x(t)$ e $y(t)$ son diferenciables en el intervalo $[a,b]$ se llama **arco diferenciable.** Si $x'(t)$ e $y'(t)$ son continuas y no valen ambas cero para el mismo valor de t, se llama **arco suave.** La derivada de $z(t)$ es

$$z'(t) = x'(t) + i\,y'(t).$$

- Si $z'(t)\neq 0$, $z'(t)$ representa un vector tangente a la curva en el punto $z(t)$.
- La función $|z'(t)| = \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}$ es integrable sobre el intervalo $[a,b]$, siendo la **longitud de arco** $L=\int\limits_a^b |z'(t)|\,dt$.

- La representación paramétrica para C no es única.
- El número L es invariante.

Definición 45 *Un **contorno**, o **arco suave a tramos**, es un arco que consiste en un número finito de arcos suaves unidos por sus extremos. $z(t)$ es continua y su derivada $z'(t)$ es continua a tramos.*

- Cuando sólo coinciden los valores inicial y final de $z(t)$, el contorno se llama **contorno cerrado simple**.
- La longitud de un contorno cerrado simple es la suma de las longitudes de los arcos suaves.

Definición 46 *Las integrales de funciones definidas como en (1) sobre intervalos $[a, b]$ se definen como*

$$\int_a^b w(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

cuando las integrales de la derecha existen, es decir $\mathrm{Im}(\int_a^b w(t)dt) = \int_a^b \mathrm{Im}(w(t))dt$, y $\mathrm{Re}(\int_a^b w(t)dt) = \int_a^b \mathrm{Re}(w(t))dt$.

Lema 1 *Sean $w(t) = u(t) + i\,v(t)$ y $W(t) = U(t) + i\,V(t)$ continuas en el intervalo $[a, b]$ y $W'(t) = w(t)$, entonces $\int_a^b w(t)dt = W(b) - W(a)$*

Lema 2 *Supongamos que una función $f(z)$ es derivable en todo punto de un arco diferenciable $z(t)$, $a \leq t \leq b$. Si $w(t) = f(z(t))$, entonces $w'(t) = f'(z(t))z'(t)$.*

Ejercicio 12 Demuestre los dos lemas anteriores.

Integral de contorno

$$\int_C f(z)dz$$

Definición 47 *Sea*

- C : *contorno* $z(t)$, $t \in [a,b]$.
- $f(z) = u + i\,v$ *continua a tramos sobre* C *(es decir* $f(z(t))$ *es continua a tramos en el intervalo* $[a,b]$*).*

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \int_a^b f(z(t))\,z'(t)dt \\
&= \int_a^b (u\,x' - v\,y')dt + i\int_a^b (u\,y' + v\,x')dt \\
&= \int_{(x(a),y(a))}^{(x(b),y(b))} (u\,dx - v\,dy) + i \int_{(x(a),y(a))}^{(x(b),y(b))} (u\,dy + v\,dx)
\end{aligned}$$

Propiedades

- $\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$.
- Sea $C = C_1 + C_2$, $\quad \int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$.
- $\int_C \alpha\, f(z)dz = \alpha \int_C f(z)dz$.
- $\int_C [f(z) + g(z)]dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz$.
- $\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \int_a^b |f(z(t))\,z'(t)|\,dt \leq M\,L$ donde $|f(z)| \leq M$ sobre la curva C y L es la longitud de C.

Ejercicio 13 Integrales de contornos.

1. Calcular las siguientes integrales utilizando la definición:

   a) $\int\limits_{|z-z_0|=R} \frac{dz}{z-z_0}$, *b)* $\int\limits_C 1.dz$ donde C es el segmento que une los puntos z_1 y z_2.

2. Sea f una función continua a tramos sobre un contorno $C : z = z(t)$, $t \in [a,b]$. Sea $R = \left|\int\limits_C f(z)dz\right|$ y $\Theta = Arg\left(\int\limits_C f(z)dz\right)$, es decir: $\int\limits_C f(z)dz = R.e^{i\Theta}$. Muestre que:

   a) $R = \int\limits_C e^{-i\Theta}f(z)dz$

   b) $\mathrm{Im}\left(\int\limits_C e^{-i\Theta}f(z)dz\right) = 0$

   c) $\mathrm{Re}\left(\int\limits_C e^{-i\Theta}f(z)dz\right) = \int\limits_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\Theta}f(z(t))z'(t)\right)dt = R$

   d) $0 \leq R = \left|\int\limits_C f(z)dz\right| \leq \int\limits_a^b |f(z(t))|\,|z'(t)|\,dt \leq M.L$

   donde $M = \max\limits_{t\in[a,b]} |f(z(t))|$ y $L = \int\limits_a^b |z'(t)|\,dt$

Definición 48 *Un dominio* ***simplemente conexo*** *D, es un dominio tal que todo contorno cerrado simple dentro de él, encierra sólo puntos de D.*

Definición 49 *Un dominio que no es simplemente conexo se llama* ***múltiplemente conexo****.*

Teorema de la Integral de Cauchy

Teorema 27 *Si $f(z)$ es analítica y $f'(z)$ es continua en un dominio D simplemente conexo y acotado, entonces para toda curva cerrada simple en D,*

$$\int_C f(z)dz = 0$$

Teorema de Cauchy-Goursat

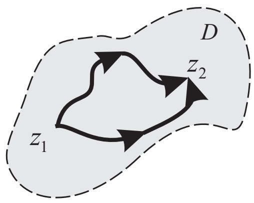
Teorema 28 *Si una función f es analítica en todos los puntos interiores de un contorno cerrado simple C y sobre los puntos de C entonces*

$$\int_C f(z)dz = 0$$

Ejercicio 14 Teorema de Cauchy.

1. Demuestre el Teorema de Cauchy (**27**) [sug. utilice el teorema de Green y las ecuaciones de Cauchy-Riemann].

2. Sea D un dominio simplemente conexo y f una función analítica en D. Sean C_1 y C_2 dos curvas contenidas en D que unen dos puntos cualesquiera z_1 y z_2 en D. Como indica la figura:

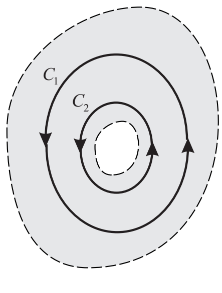


Muestre que: $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$.

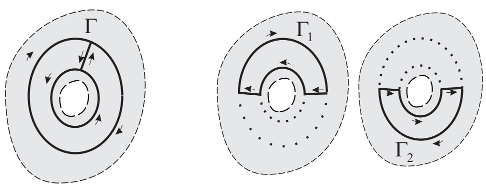
3. Use el ejercicio anterior y el ejercicio **13** para probar que si $f(z) = 1$

$$\int_{C_1} dz = \int_{C_2} dz = \int_{z_1}^{z_2} dz = z_2 - z_1$$

4. Sea f una función analítica en la región comprendida entre las curvas cerradas simples C_1 y C_2 y sobre las mismas, como indica la figura:



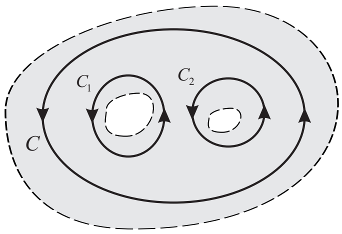
Muestre a partir del Teorema de Cachy que $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$.
[Sug. considere las curvas Γ, o Γ_1 y Γ_2 como muestran las figuras].



5. Sea C una curva cerrada simple que encierra al punto z_0 en sentido positivo. Calcule $\int_C \frac{dz}{z-z_0}$, [recuerde el resultado del ejercicio **13**].

6. De manera similar al ejercicio anterior muestre que si f es analítica en la región comprendida entre las curvas C, C_1 y C_2, y sobre las mismas (como indica la región sombreada de la figura)

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$



Teorema de Cauchy para dominios múltiplemente conexos

Teorema 29 *Supongamos que*

- *C es un contorno cerrado simple con orientación positiva.*
- *C_k $(k = 1, 2, ..., n)$ denota un número finito de contornos cerrados simples orientados positivamente, interiores a C y cuyos interiores no tienen puntos en común.*

Si una función f es analítica en la región cerrada formada por los puntos interiores a C o del propio C, excepto en los puntos interiores a cada C_k, entonces

$$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{k=n} \int_{C_k} f(z)dz$$

Primitivas

Teorema 30 *Sea $f(z)$ una función continua en un dominio D (puede ser mult. conexo). Si cualquiera de estas afirmaciones es verdadera, lo son también las demás:*

- *$f(z)$ tiene una primitiva F en D.*
- *las integrales de f a lo largo de contornos contenidos en D que unen dos puntos fijos z_1 y z_2 tienen todas el mismo valor ($F(z_2) - F(z_1)$).*
- *las integrales de f a lo largo de cualquier contorno cerrado contenido en D tienen todas el mismo valor (cero).*

Teorema 31 *Si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conexo D, entonces:*

- *$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$ es independiente del contorno de integración en el dominio D.*
- *$f(z)$ tiene primitiva en D.*
- *una primitiva de f es $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz$.*
- *$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$.*

Ejercicio 15 Sea f una función continua en un dominio D.

1. Muestre que si existe una primitiva F de f en D entonces

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

   [este es un resultado muy práctico para el cálculo de integrales por primitivas].

2. Sea la integral de f independiente del contorno en D, es decir si C_1 y C_2 son dos curvas cualesquieras, que unen dos puntos z_1 y z_2 en D, entonces $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$. Muestre que

   a) Para un z_0 dado en D, el valor de $\int_{z_0}^{z} f(s)ds$ es único para cada $z \in D$.

   b) $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)ds$ es una función definida en D.

   c) $\Delta W = F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z}^{z+\Delta z} f(s)ds$.

   d) $\Delta z = \int_{z}^{z+\Delta z} ds$ [use ejercicio **13**].

   e) $\frac{\Delta W}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\left[\int_{z}^{z+\Delta z} f(s)ds - f(z)\Delta z\right] = \frac{1}{\Delta z}\left[\int_{z}^{z+\Delta z} f(s)ds - \int_{z}^{z+\Delta z} f(z)ds\right]$

f) $\frac{\Delta W}{\Delta z} - f(z) = \frac{\int_z^{z+\Delta z}(f(s)-f(z))ds}{\Delta z}$

g) Dado $\varepsilon > 0$, siempre existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que:

1) $|f(s) - f(z)| < \varepsilon$ siempre que $|s - z| < \delta$

2) $\left|\frac{\Delta W}{\Delta z} - f(z)\right| < \varepsilon$ siempre que $|\Delta z| < \delta$

h) $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta z} = f(z) \quad \therefore F'(z) = f(z) \quad \forall z \in D$ (F es una primitiva de f en D).

3. Si además D es simplemente conexo y f es analítica en D, probar el teorema **31** utilizando el teorema de Cauchy y el **30**.

Fórmula Integral de Cauchy

Teorema 32 *Sea f analítica en el interior y en los puntos de un contorno cerrado simple C, orientado positivamente. Si z_0 es un punto interior a C, entonces*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz \quad n = 1, 2, ...$$

Teorema 33 *Una función analítica tiene derivadas de todo orden y son todas analíticas.*

Ejercicio 16 Sea D un dominio simplemente conexo y f analítica en D. Sea C un contorno cerrado simple, con orientación positiva, contenido en D, que encierra un punto z_0 en su interior. Sea C_0 un círculo centrado en z_0 de radio suficientemente pequeño para quedar contenido íntegramente dentro del contorno C. Muestre que:

1. $\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_{C_0} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$.
2. $\int_{C_0} \frac{1}{z-z_0}dz = 2\pi i$.
3. $\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz - 2\pi i\, f(z_0) = \int_{C_0} \frac{f(z)}{z-z_0}dz - f(z_0)\int_{C_0} \frac{dz}{z-z_0}$.
4. $\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz - 2\pi i\, f(z_0) = \int_{C_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz$.
5. $0 \leq \left|\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz - 2\pi i\, f(z_0)\right| \leq \varepsilon$, donde ε es un número arbitrariamente pequeño.
6. $\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i\, f(z_0)$

Teorema de Morera

Teorema 34 *Si una función f es continua en un dominio D simplemente conexo y si $\int_C f(z)dz = 0$ para todo contorno cerrado C contenido en D, entonces f es analítica en D.*

Teorema de Liuville

Teorema 35 *Si f es analítica y acotada en módulo para toda z del plano complejo, entonces $f(z)$ es constante.*

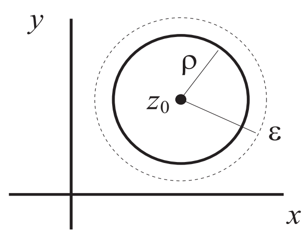
Ejercicio 17 Derivadas de funciones analíticas, teorema de Morera, principio del módulo máximo.

1. A partir de la Fórmula Integral de Cauchy para las derivadas demuestre el teorema **33.**

2. Demuestre el teorema de Morera, utilice los teoremas **30** y **33**.

3. Sea f analítica en un entorno de un punto z_0, $|z - z_0| < \varepsilon$.

   a) Muestre que si una función es analítica dentro y sobre un círculo dado, su valor en el centro es la media aritmética de sus valores sobre el círculo (*teorema del valor medio de Gauss*), es decir $f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \rho\, e^{i\theta})\, d\theta$, donde $\rho < \varepsilon$.

   [sug. utilice la fórmula integral de Cauchy].

   b) Sea z_0 un punto tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, para todo z en ese entorno. Muestre:

   1) $|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left|f(z_0 + \rho\, e^{i\theta})\right| d\theta$.

   2) $|f(z_0)| \geq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left|f(z_0 + \rho\, e^{i\theta})\right| d\theta$.

   3) $\int\limits_0^{2\pi} \left(|f(z_0)| - \left|f(z_0 + \rho\, e^{i\theta})\right|\right) d\theta = 0$.

   4) $|f(z)| = |f(z_0)|$ para todo punto del círculo $|z - z_0| = \rho$.

   5) $|f(z)| = |f(z_0)|$ para todo punto del entorno.

6) Si f es analítica en un dominio D, y $|f(z)| = c$ es constante en D, entonces f es constante. (usar ecuaciones de Cauchy-Riemann y notar que $\overline{f(z)} = c^2/f(z)$).

7) *Lema*: Sea f una función analítica en un entorno de un punto z_0, $|z - z_0| < \varepsilon$, si $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, para todo z en ese entorno, entonces f es constante.

4. Use el lema anterior para probar el *principio del módulo máximo*:

   Si una función f es analítica y no constante en un dominio D, $|f(z)|$ no tiene valor máximo en D.

Sucesiones y series

Definición 50 *Una sucesión de números complejos es una función de* $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

Definición 51 *Una sucesión z_n es convergente si tiene límite z, es decir para cada $\varepsilon > 0$, existe un número natural N_0 tal que* $|z_n - z| < \varepsilon \quad \forall\, n > N_0$,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad \text{ó} \quad z_n \to z.$$

Teorema 36 *Supongamos que $z_n = x_n + i\,y_n$, y $z = x + i\,y$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \end{cases}$$

Propiedades de límites de sucesiones:

1. Sean z_n y w_n dos suceciones convergentes tales que $z_n \to z$ y $w_n \to w$. Entonces:

   a) $a_n = \alpha\, z_n + \beta\, w_n$ también es convergente y $a_n \to \alpha\, z + \beta\, w$.

   b) $b_n = z_n\, w_n$ también es convergente $b_n \to z\, w$.

   c) Si $z_n \neq 0$ para todo n, y $z \neq 0$; $c_n = \dfrac{1}{z_n}$ también es convergente y $c_n \to \dfrac{1}{z}$.

   d) Toda subsucesión de z_n tiene límite z.

2. Toda sucesión convergente es acotada.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z|$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 0$.

5. $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ y $|w_n| < M$ para todo $n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} z_n\, w_n = 0$.

6. Si $\lim_{n\to\infty} z_n = z, \quad z_n \in dominio(f)$ y $\lim_{w\to z} f(w) = c \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} f(z_n) = c$.

Definición 52 *Una serie de números complejos* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$, *converge con suma* S, *si la sucesión*

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_N$$

de sumas parciales converge a S.

Teorema 37 *Supongamos que* $z_n = x_n + i\, y_n$, *y* $S = X + i\, Y$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \Longleftrightarrow \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} x_n = X \\ \sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y \end{cases}$$

En consecuencia una condición necesaria para la convergencia de la serie es que

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0.$$

Definición 53 *Una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *es absolutamente convergente si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$*de números reales es convergente.*

Teorema 38 *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ *es convergente entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *también es convergente.*

- Si la serie $\sum |a_n|$ converge se dice que la serie $\sum a_n$ **converge absolutamente**.
- Si la serie $\sum a_n$ converge y la serie $\sum |a_n|$ diverge entonces se dice que la serie $\sum a_n$ **converge condicionalmente**.
- La suma de una serie absolutamente convergente no depende del orden de sus términos.
- Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series convergentes con suma A y B respectivamente, entonces:
  - $\sum (a_n + b_n)$ converge y su suma es $A + B$.
  - Si c es un número complejo, $\sum c\, a_n$ converge y su suma es $c\, A$.

Criterio de Dirichlet.

Si la sucesión de números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ tiende monótonamente a cero y $\sum z_n$ tiene sumas parciales acotadas (z_n es una sucesión compleja, $\left|\sum_1^N z_n\right| \leq k$, independiente de N), entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ es convergente.

Series de funciones

Definición 54 *Una serie de funciones es una serie cuyos términos son funciones de una variable compleja definida en una región D del plano complejo*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z).$$

- $f_n : D \to \mathbb{C}$
- Sucesión de funciones de sumas parciales: $S_N(z) = \sum_{n=1}^{N} f_n(z)$.
- Región de convergencia: es el conjunto de puntos $RC \subset D$, para los cuales la serie converge, es decir donde $S_N(z)$ tiene límite.
- Función suma: $S(z) = \lim\limits_{n\to\infty} S_N(z)$, en la región de convergencia.
- Resto de la serie: $R_N(z) = S(z) - S_N(z)$, en la región de convergencia.

Convergencia uniforme.

Definición 55 *Se dice que la serie $\sum f_n(z)$ converge uniformemente en la región M, si dado $\varepsilon > 0$, existe un número natural $N(\varepsilon)$, tal que $\forall n > N$ y $\forall z \in M$*

$$|R_n(z)| < \varepsilon.$$

Criterio de Weierstrass

Si existen números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ tales que para todos los z de un subconjunto M de la región de convergencia RC de la serie $\sum f_n(z)$,

$$|f_n(z)| \leq a_n \quad \forall n \text{ y} \, \forall z \in M \subset RC,$$

y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces la serie $\sum f_n(z)$ es **absoluta y uniformemente convergente** en M.

Teorema 39 *Si los términos de una serie de funciones $\sum f_n(z)$ son continuos en un dominio y la serie converge uniformemente en ese dominio, entonces la suma de la serie es una función continua de z en ese dominio.*

Series de Potencias

Definición 56 *Una serie de potencias es una serie de funciones con la siguiente estructura:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots$$

donde z_0 y los coeficientes c_n son constantes complejas y z cualquier punto del plano complejo.

- Si $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y existe $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{R}$, la serie de potencias converge absolutamente en el círculo $|z-z_0| < R$ y diverge absolutamente cuando$|z-z_0| > R$.
- Radio de convergencia: Fórmula de Cauchy-Hadamard: $\frac{1}{R} = \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$.

Ejercicio 18 Sea f una función analítica en un disco abierto centrado en z_0 y de radio R_0, y $C : s(t) = z_0 + r_0 e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, con $r_0 < R_0$. Sea z un punto interior al círculo C, es decir $|z-z_0| < r_0$, muestre que:

1. $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \dfrac{f(s)}{s-z} ds.$
2. $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \dfrac{f(s)}{s-z_0} \left(\dfrac{1}{1-\frac{z-z_0}{s-z_0}} \right) ds.$
3. $\frac{1}{1-w} = 1 + w + \cdots + w^N + \frac{w^{N+1}}{1-w}$
4. $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \dfrac{f(s)}{s-z_0} \left(1 + \dfrac{z-z_0}{s-z_0} + \cdots + \left(\dfrac{z-z_0}{s-z_0}\right)^N + \dfrac{\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^{N+1}}{1-\frac{z-z_0}{s-z_0}} \right) ds.$
5. $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \cdots + \frac{f^{(N)}(z_0)}{(N)!}(z-z_0)^N + \rho_N(z)$,

   con $\rho_N(z) = \frac{(z-z_0)^{N+1}}{2\pi i} \int\limits_C \dfrac{f(s)}{(s-z)(s-z_0)^{N+1}} ds.$
6. $\lim\limits_{N\to\infty} \rho_N(z) = 0.$
7. $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$

Teorema de Taylor

Teorema 40 *Sea f una función analítica en un disco abierto $|z - z_0| < R_0$. Entonces en todo punto z de ese disco $f(z)$ admite la representanción en serie de potencias:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

donde $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

- La serie de potencias converge a $f(z)$ cuando $|z - z_0| < R_0$.
- Cuando $z_0 = 0$ se llama serie de Maclaurin.
- La serie converge a $f(z)$ dentro del círculo centrado en z_0 cuyo radio es la distancia de z_0 al punto z_1 más próximo en el que f deje de ser analítica.

Convergencia absoluta y uniforme de las series de potencias

Teorema 41 *Si una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge cuando $z = z_1$, ($z_1 \neq 0$) es absolutamente convergente en todo punto del disco abierto $|z| < |z_1|$.*

- El conjunto de puntos interiores a algún círculo en torno al origen es la región de convergencia.
- El mayor círculo centrado en el origen tal que la serie converge en todos los puntos interiores se llama círculo de convergencia.
- La serie no puede converger en ningún punto z_2 exterior a ese círculo pues si lo fuera sería convergente dentro de un círculo mayor.

Teorema 42 *Si z_1 es un punto interior al círculo de convergencia $|z| = R$, de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, entonces esa serie es uniformemente convergente en el disco cerrado $|z| \leq R_1$, donde $R_1 = |z_1| < R$.*

- La suma de la serie es una función continua en todo punto interior al círculo de convergencia.

Integración y derivación de series de potencias

Ejercicio 19 Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencias con círculo de convergencia $|z| < R$, y función suma $S(z)$. Muestre que:

1. La serie converge uniformemente en todo círculo cerrado interior al círculo de convergencia.

2. $S(z)$ es una función continua en el círculo de convergencia.

3. Sea C un contorno contenido en el círculo de convergencia, entonces:

   a) $\int_c S(z)dz = \int_c \left(\sum_{n=0}^{N} a_n z^n \right) dz + \int_c \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n \right) dz.$

   b) $\int_c S(z)dz = \sum_{n=0}^{N} a_n \int_c z^n dz + \sigma_N, \qquad \text{con } \sigma_N = \int_c \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n \right) dz.$

   c) $\lim_{N\to\infty} \sigma_N = 0.$

   d) $\int_c S(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_c z^n dz.$

   e) Si C es un contorno cerrado, $\int_c S(z)dz = 0.$

4. $S(z)$ es analítica dentro del círculo de convergencia [sug. usar T. de Morera].

5. Sea z un punto interior al círculo de convergencia y sea C un contorno cerrado simple que rodea a z, contenido también dentro del círculo de convergencia, entonces:

   a) $S'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{S(w)}{(w-z)^2} dw.$

   b) $S'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\sum_{n=0}^{N} a_n w^n}{(w-z)^2} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n w^n}{(w-z)^2} dw.$

   c) $S'(z) = \sum_{n=0}^{N} n a_n z^{n-1} + \rho_N(z), \quad \text{con } \rho_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n w^n}{(w-z)^2} dw.$

   d) $\lim_{N\to\infty} \rho_N(z) = 0.$

   e) $S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$

Teorema 43 *Sea C cualquier contorno interior al círculo de convergencia de la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n = S(z)$. La serie puede ser integrada término a término sobre C, esto es*

$$\int_c S(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_c z^n dz.$$

Teorema 44 *La serie de potencias representa una función analítica en todo punto interior a su círculo de convergencia.*

Teorema 45 *La serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ puede ser derivada término a término. Esto es*

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

en todo punto interior al círculo de convergencia.

- Dada una serie de potencias con su respectiva región de convergencia, de los teoremas **43** y **45** se deduduce que tanto la serie que resulta de integrarla término a término, o de derivarla término a término, tienen la misma región de convergencia que la serie original.

Ejercicio 20 Series de potencias

1. Sabiendo que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ representa una función analítica en $|z| < R$ probar que:

   a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ representa una función analítica en $|z - z_0| < R$.

   b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(z-z_0)^n}$ representa una función analítica en $|z - z_0| > \frac{1}{R}$.

2. Extienda los teoremas **41**, **42**, **43** y **45** para el caso general de $z_0 \neq 0$.

Unicidad de las representaciones en series de Potencias

Teorema 46 *Si una serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge a $f(z)$ en todo punto interior a algún círculo, entonces es la serie de Taylor de f en potencias de $z - z_0$.*

Series de Laurent

Teorema 47 *Sea f una función analítica en un dominio anular $R_1 < |z - z_0| < R_2$, y sea C cualquier contorno cerrado simple, orientado positivo, en torno a z_0 y contenido en ese dominio. Entonces, en todo punto z de ese dominio, $f(z)$ admite la representación en serie*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

donde

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad n = 0, 1, 2, ... \\ b_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz \quad n = 1, 2, ... \end{aligned}$$

- Se suele escribir $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ en $R_1 < |z - z_0| < R_2$, donde $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Ejercicio 21 Sea f una función analítica en un dominio D, anular $R_1 < |z| < R_2$, y sea C cualquier contorno cerrado simple, orientado positivo, en torno al origen y contenido en ese dominio D. Sea $z \in D$, $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ y $r_3 < \text{mín}(r_2 - |z|, |z| - r_1)$,considere los siguientes círculos: $C_1 : w(t) = r_1 e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $C_2 : w(t) = r_2 e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $C_3 : w(t) = z + r_3 e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

1. Realice un gráfico esquemático del dominio D con el punto z y los círculos C_1, C_2, y C_3.

2. Muestre las siguientes igualdades:

- $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C_3} \frac{f(w)}{w - z} dw.$
- $\displaystyle\int_{C_2} \frac{f(w)}{w - z} dw = \int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} dw + \int_{C_3} \frac{f(w)}{w - z} dw.$
- $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} dw.$
- $\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w} + \frac{1}{w^2} z + \cdots + \frac{1}{w^{N+1}} z^N + \frac{1}{(w-z)w^{N+1}} z^{N+1}.$
- $-\frac{1}{w-z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 w^{-1}} + \cdots + \frac{1}{z^{N+1} w^{-N}} + \frac{1}{(z-w)z^{N+1}} w^{N+1}.$
- $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n z^n + \rho_N(z) + \sum\limits_{n=1}^{N} b_n z^{-n} + \sigma_N(z),$
  donde: $a_n = \frac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C_2} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw,$

$b_n = \frac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C_1} \frac{f(w)}{w^{-n+1}} dw,$

$\rho_N(z) = \frac{z^{N+1}}{2\pi i} \displaystyle\int_{C_2} \frac{f(w)}{(w-z)w^{N+1}} dw,$ y

$\sigma_N(z) = \frac{1}{z^{N+1}2\pi i} \displaystyle\int_{C_1} \frac{f(w)w^{N+1}}{(z-w)} dw.$

- $\lim\limits_{N\to\infty} \rho_N(z) = 0$ y $\lim\limits_{N\to\infty} \sigma_N(z) = 0.$
- $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}.$

3. Sea C cualquier contorno cerrado simple, orientado positivo, en torno al origen y contenido en ese dominio D. Incluya a C en el gráfico 1 y vea que $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw$ y $b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w^{-n+1}} dw$.

4. Extienda la demostración para $z_0 \neq 0$.

Punto singular aislado - Residuo

Definición 57 *Un punto singular z_0 de una función f es aislado si existe un entorno reducido de z_0, $0 < |z - z_0| < \varepsilon$, en el que f es analítica.*

Definición 58 *Sea z_0 un punto singular aislado de f. Esta función puede representarse por una serie de Laurent en un entorno reducido de z_0, $0 < |z - z_0| < R_2$.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \cdots$$

- *La porción de la serie de potencias negativas de $z - z_0$, se llama parte principal de f en z_0.*
- *El coeficiente b_1 de ese desarrollo se llama **residuo** de f en el punto z_0.*

$$b_1 = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$$

- *Por teorema de Laurent,el residuo $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)dz$, donde C es una curva cerrada simple, orientada positiva, que encierra a un único punto singular $z = z_0$.*

Definición 59 *Existen tres tipos de puntos singulares aislados:*

1. *Si la parte principal de f en un punto singular z_0 contiene un número finito de términos no nulos, $b_m \neq 0$ y $b_n = 0 \, \forall n > m$, el punto singular aislado se llama **polo de orden m**. Si $m = 1$ se llama **polo simple**.*

2. *Si la parte principal de f en z_0 tiene infinitos términos no nulos, se llama **punto singular esencial**.*

3. *Si en la parte principal de f en z_0 los coeficientes b_n son todos nulos, el punto z_0 se llama **punto singular evitable**. Si se define $f(z_0) = a_0$ la función pasa a ser analítica en z_0.*

Teorema de los residuos

Teorema 48 *Si C es un contorno cerrado simple, positivamnete orientado, sobre y dentro del cual una función f es analítica a excepción de un número finito de puntos singulares z_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ interiores a C, entonces*

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Ejercicio 22 Demuestre el teorema de los residuos [sug. utilice teorema **29**]

Ceros y polos de orden m

Definición 60 *Si f es analítica en z_0, $f(z_0) = 0$, y existe un entero positivo m, tal que $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ y todas las derivadas de orden inferiores a m se anulan en z_0, se dice que f tiene un cero de orden m en z_0. Además se puede expresar*

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

donde g es analítica en z_0 y $g(z_0) \neq 0$.

Lema 3 *f tiene un polo de orden m en z_0, si y sólo si, puede expresarse como*

$$f(z) = \frac{\Phi(z)}{(z - z_0)^m},$$

donde Φ es analítica en z_0 y $\Phi(z_0) \neq 0$. Los coeficientes de la parte principal en z_0 verifican

$$b_k = \frac{\Phi^{(m-k)}(z_0)}{(m-k)!}.$$

- Esta fórmula es de gran utilidad en el cálculo de residuo en polos pues

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\Phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \\ &= \tfrac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-z_0)^m f(z) \right), \end{aligned}$$

  si $m = 1$, $b_1 = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$.

- También es muy útil en la descomposición en fracciones parciales de una función racional $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$,

$$\begin{aligned} R(z) &= \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{b_k(z_j)}{(z-z_j)^k} \\ &= \frac{b_1(z_1)}{z-z_1} + \frac{b_2(z_1)}{(z-z_1)^2} + \cdots + \frac{b_1(z_r)}{z-z_r} + \frac{b_2(z_r)}{(z-z_r)^2} + \cdots + \frac{b_{m_r}(z_r)}{(z-z_r)^{m_r}}, \end{aligned}$$

  donde P y Q son polinomios y el grado de P es menor que el grado de Q, Q tiene r ceros distintos z_j de orden m_j y no tiene ceros en común con P. Los coeficientes de las fracciones se pueden calcular utilizando la fórmula de la definición anterior, sea $\Phi_j(z) = (z - z_j)^{m_j} R(z)$ para $z \neq z_j$ y $\Phi_j(z_j) = \lim\limits_{z \to z_j} (z - z_j)^{m_j} R(z)$

$$\begin{aligned} b_k(z_j) &= \frac{\Phi_j^{(m_j-k)}(z_j)}{(m_j-k)!} \\ &= \tfrac{1}{(m_j-k)!} \lim_{z \to z_j} \frac{d^{m_j-k}}{dz^{m_j-k}} \left((z-z_j)^{m_j} R(z) \right) \end{aligned}$$

Teorema de Picard

Teorema 49 *En todo entorno de un punto singular esencial, una función alcanza todo valor finito, con una única posible excepción, un número infinito de veces.*

Ejercicio 23 Sea z_0 un punto singular aislado de f.

1. Probar que:

   a) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existe $\Longleftrightarrow$ z_0 es punto singular evitable de f.

   b) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty \Longleftrightarrow z_0$ es polo de f.

   c) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ no existe $\Longleftrightarrow$ z_0 es punto singular esencial de f.

2. Sea k un entero, $k \geq 0$, usando el Lema 3 muestre que:

$$z_0 \text{ es polo de orden } m \text{ de } f \Longleftrightarrow \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) = \begin{cases} \infty & k < m \\ \Phi(z_0) \neq 0 & k = m \\ 0 & k > m \end{cases}$$

Teorema 50 *Los ceros de una función analítica (no nula) son aislados.*

Lema 4 *Si $f(z) = 0$ en todo punto z de un dominio o arco que contiene un punto z_0, entonces $f(z) \equiv 0$ en cualquier entorno N_0 de z_0, en el que f sea analítica. Esto es $f(z) = 0$ en todo punto de N_0.*

Teorema 51 *Si una función f es analítica en un dominio D y $f(z) = 0$ en todo punto de un dominio o arco interior a D, entonces $f(z) \equiv 0$ en D.*

Prolongación Analítica

Definición 61 *Dos funciones analíticas: f_1 definida en el dominio D_1 y f_2 definida en el dominio D_2 se dicen que son **prolongaciones analíticas** una de la otra si $D_1 \cap D_2 \neq \phi$ y $f_1(z) = f_2(z)$ en $D_1 \cap D_2$.*

Ejercicio 24 Ceros - Regla de L'hopital - residuos - descomposición en fracciones parciales

1. Sean $f(z)$ y $g(z)$ funciones analíticas en un dominio D. Muestre que si $f(z) = g(z)$ en todo punto de un dominio o arco interior a D, entonces $f(z) \equiv g(z)$ en D.

2. Sean $f(z)$ y $g(z)$ funciones analíticas, ambas con un cero en z_0. Analizar la singularidad que presentan las funciones $\frac{f(z)}{g(z)}$ y $\frac{f'(z)}{g'(z)}$ en el punto z_0 y probar que $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$, si este último existe.

3. Sea C un contorno cerrado simple que encierra un único polo de una función $f(z)$ en sentido antihorario. Comparar la forma de resolver la integral $\int_C f(z)dz$ utilizando la Fórmula Integral de Cauchy y el Teorema de los Residuos.

4. Descomponer en fracciones parciales utilizando residuos:

   a) $\frac{z+12}{z^2+4z}$

   b) $\frac{2}{z^2(z+1)}$

   c) $\frac{10-4z}{(z-2)^2}$

   d) $\frac{z+2}{z^2+1}$

Transformada de Laplace

Bibliografía:

- *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería.* James, G.,Pearson Educación
- *Matemáticas avanzadas para ingeniería 1.* Kreyszig, Erwin. (**517. K889-1/ 517. K889**).
- *Transformadas de Laplace.* Spiegel, Murray R. (**517.7 Sp43-1**)
- *Teoría y problemas de matemáticas superiores para ingenieros y científicos.* Spiegel, Murray R.(**510 Sp43**)
- *Modern operational mathematics in engineering.* Churchill, Ruel V. (**517.7 C473 / 517.7 C473-1a2**)
- *Functions of a complex variable.* Moretti, Gino.(**517.8 M818**)

Definición 62 *Sea* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, *es decir una función real definida para* $t \geq 0$. *Si la integral* $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$, *existe donde s puede ser real o complejo, se define una función de s*

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt.$$

La función $F(s)$ *se llama transformada de Laplace de la función original* $f(t)$ *y se denota por* $\mathcal{L}\{f(t)\}$, *entonces*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt.$$

La función original $f(t)$ *se conoce como transformada inversa o inversa de* $F(s)$, *es decir*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

La función original también puede ser una función compleja de variable real, es decir $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, $f(t) = f_r(t) + i\, f_i(t)$. *La transformada de Laplace en este caso se define del mismo modo*

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st} \left(f_r(t) + i\, f_i(t)\right) dt.$$

Notación: las funciones originales se denotan mediante letras minúsculas y sus transformadas por las mismas letras en mayúscula.

Teorema 52 *Si la integral* $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ *converge absolutamente para* $s = \sigma_0$ *entonces la integral converge absoluta y uniformemente para todo* $\mathrm{Re}(s) \geq \sigma_0$.

Abscisa de convergencia

Definición 63 *El número* β *es la abscisa de convergencia absoluta si la integral de Laplace converge absolutamente para* $\mathrm{Re}(s) > \beta$ *y diverge absolutamente para* $\mathrm{Re}(s) < \beta$.

Definición 64 *El número* β' *es la abscisa de convergencia si la integral de Laplace converge para* $\mathrm{Re}(s) > \beta'$ *y diverge para* $\mathrm{Re}(s) < \beta'$.

Orden Exponencial

Definición 65 *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$ *diremos que* f *es de orden exponencial cuando* $t \to \infty$ *si existen constantes positivas* M *y* T *tales que*

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t} \quad \forall t > T$$

ó

$$e^{-\alpha t}\,|f(t)| \leq M \quad \forall t > T$$

y escribimos $f = O(e^{\alpha t})$.

Lema 5 .

- *Si* $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\alpha t}|f(t)|$ *existe, entonces* $f = O(e^{\alpha t})$.
- f *es de orden exponencial si y sólo si existe una constante* β *tal que* $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\beta t} f(t) = 0$.

Corolario: Si $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\beta t} f(t) = \infty$ para todo β, entonces f no es de orden exponencial.

Ejercicio 25 Probar que 1, t, t^n, $\mathrm{sen} t$, $\cos t$, e^{at}, e^{it}, son de orden exponencial y e^{t^2} no es de orden exponencial.

Condiciones para la existencia de la Transformada de Laplace

Teorema 53 *Si*

- $f(t)$ *es continua a tramos en* $0 \leq t < \infty$.
- $f(t)$ *es de orden exponencial,* $f = O(e^{\alpha t})$.

  Entonces $F(s)$ *existe para* $\mathrm{Re}(s) > \alpha$. *Es decir la abscisa de convergencia* β' *es menor o igual a* α.

Analiticidad de la Transformada de Laplace

Lema 6 *Si* $f(t)$ *es de orden exponencial,* $f = O(e^{\alpha t})$, *entonces* $tf(t) = O(e^{\alpha_0 t})$ *para todo* $\alpha_0 > \alpha$.

Teorema 54 *Si* $f(t)$ *es continua a tramos y de orden exponencial,* $f = O(e^{\alpha t})$, *entonces* $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ *es analítica en el semiplano* $\mathrm{Re}(s) > \alpha$, *y converge absoluta y uniformemente en el semiplano* $\mathrm{Re}(s) \geq \alpha_0 > \alpha$. *Además* $F'(s) = -\mathcal{L}\{tf(t)\}$.

Función de Heaviside o escalón unitario

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Conjunto de funciones transformables según Laplace

$\mathcal{TL} = \{f(t) : f \text{ continua a tramos y de orden exponencial, } f(t) = 0 \forall t < 0\}$.

Ejercicio 26 La función $f(t) = e^t \mathrm{sen}(e^t)$ es continua a tramos y de orden exponencial ($\alpha = 1$). Su abscisa de convergencia absoluta es $\beta = 1$, y la abscisa de convergencia es $\beta' = 0$ [para probar esto último haga $y = e^t$ y analice $\int_1^\infty \frac{\mathrm{sen} y}{y^s} dy$].

Transformada Inversa. Teorema de Lerch

Teorema 55 *Si dos funciones* f *y* g *tienen la misma transformada de Laplace, entonces* $f - g = N$, *donde* N *es una función nula,* $\int_0^T N(t)dt = 0 \ \forall T > 0$.

- Si dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ tienen la misma transformada de Laplace, entonces f y g toman los mismos valores en todo los puntos $t > 0$ donde ambas sean continuas.

Teorema 56 *Si $f(t)$ es de orden exponencial $O(e^{\alpha t})$ y continua a tramos, entonces*

$$\lim_{\substack{\mathrm{Im}(s)=0 \\ \mathrm{Re}(s)\to+\infty}} F(s) = 0$$

y $|sF(s)| \leq K$ *cuando* $\mathrm{Im}(s) = 0$ *y* $\mathrm{Re}(s) \to \infty$.

Ejercicio 27 Pruebe los siguientes items:

1. Lema **6,** Teoremas **53, 54, y 56**.

2. $\mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{1\}$.

3. Sobre el conjunto de funciones $\mathcal{TL}^C = \{f(t) : f$ continua y de orden exponencial, $f(t) = 0 \forall t < 0\}$, la transformada de Laplace tiene inversa única.

Propiedades

Consideremos el siguiente par de transformadas de Laplace con su correspondiente regiones de convergencia:

$$\begin{array}{rcll} f(t) & \longleftrightarrow & F(s) & \mathrm{Re}(s) > p \\ g(t) & \longleftrightarrow & G(s) & \mathrm{Re}(s) > q \end{array}$$

Linealidad

Para α, $\beta \in \mathbb{C}$:

$$\alpha\, f(t) + \beta\, g(t) \quad \longleftrightarrow \quad \alpha\, F(s) + \beta\, G(s) \quad \mathrm{Re}(s) > \text{máx}(p, q)$$

Traslación

Para $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$e^{\alpha t}\, f(t) \quad \longleftrightarrow \quad F(s-\alpha) \quad \mathrm{Re}(s) > p + \mathrm{Re}(\alpha)$$

Para $a > 0$:

$$h(t-a)f(t-a) \quad \longleftrightarrow \quad e^{-as}F(s) \quad \mathrm{Re}(s) > p$$

Más propiedades...

Cambio de escala

Para $a > 0$:

$$f(at) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{a}\,F(\frac{s}{a}) \qquad \mathrm{Re}(s) > a\,p$$

Derivadas

$$f^{(n)}(t) \quad \longleftrightarrow \quad s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \qquad \mathrm{Re}(s) > p$$

$$(-1)^n t^n f(t) \quad \longleftrightarrow \quad F^{(n)}(s) \qquad \mathrm{Re}(s) > p$$

Integrales

$$\int_0^t f(t)dt \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{s}F(s) \qquad \mathrm{Re}(s) > \text{máx}(p, 0)$$

Si $\exists \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} \Rightarrow$

$$\frac{f(t)}{t} \quad \longleftrightarrow \quad \int_s^\infty F(u)du \qquad \mathrm{Re}(s) > p$$

Ejercicio 28 Pruebe las propiedades anteriores para valores de s que están sobre una semirecta en el eje real y luego extiéndalas por prolongación analítica sobre todo el semiplano de la región de convergencia.

Funciones Periódicas

Teorema 57 *Sea $f(t)$ periódica, de periodo T, es decir $f(t+T) = f(t)$, $t > 0$. Si f es continua a tramos en el periodo $0 \leq t \leq T$, su transformada existe y podemos escribir*

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-s\,t} f(t)dt.$$

Propiedades asintóticas

Teorema 58 ***Teorema del Valor Inicial.*** *Si f y f' son continuas a tramos y de orden exponencial, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y existe el $\lim\limits_{\substack{\mathrm{Im}(s)\,=\,0 \\ \mathrm{Re}(s)\,\to\,+\infty}} sF(s)$, entonces*

$$f(0) = \lim_{\substack{\mathrm{Im}(s)\,=\,0 \\ \mathrm{Re}(s)\,\to\,+\infty}} sF(s).$$

Teorema 59 ***Teorema del Valor Final.*** *Si f y f' admiten transformada de Laplace para* $\mathrm{Re}(s) > 0$ *y $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, si existe $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$, entonces*

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to\infty} f(t).$$

Producto de Convolución

Definición 66 *El producto de convolución entre dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ (cuya notación es $f * g$) se define mediante la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du$, sin embargo en el caso de utilizarse en aplicaciones junto a la transformada de Laplace, o bien porque se considera que $f(t)$, $g(t)$ y $(f*g)_{(t)}$ son nulas para $t < 0$, o están sólo definidas en $(0, +\infty)$, la integral resulta con los siguientes extremos:*

$$(f * g)_{(t)} = \int_0^t f(u)g(t-u)du \qquad \forall t > 0.$$

Propiedades

- $f * g = g * f$
- $(f * g) * v = f * (g * v)$
- $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$

Teorema de Convolución

Teorema 60 *Si $f(t)$ y $g(t)$ son las transformadas inversas de $F(s)$ y $G(s)$ respectivamente, la transformada inversa del producto $F(s)G(s)$ es la convolución de $f(t)$ y $g(t)$.*

Resolución de ecuaciones diferenciales.

La transformada de Laplace provee un método para resolver ecuaciones diferenciales (lineales con coeficientes constantes) y los correspondientes problemas con condiciones iniciales o con valores en la frontera. El proceso de resolución consta de tres pasos principales:

1. El problema complejo de resolver una ecuación diferencal o un sistema de ecuaciones diferenciales se transforma, utilizando la propiedad de las derivadas, en un problema más sencillo de resolver una ecuación algebraica o un sistema algebraico lineal.

2. Se resuelve el problema haciendo manipulaciones algebraicas.

3. La solución del sistema algebraico se transforma en sentido inverso para obtener la solución del problema dado.

En la mayoría de las aplicaciones consideradas en este curso se obtienne una solución de la forma $Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$,donde P y Q son polinomios en s. En tal caso es posible determinar la solución $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$, expresando primero $Y(s)$ en términos de fracciones parciales, y luego antitransformando. A este método se lo llama: **Desarrollo de Heaviside**.

Series de Fourier

Bibliografía

- *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería.* James, G.,Pearson Educación
- *Series de Fourier y problemas de contorno.* Churchill, Ruel V. (**517.2. C473-1**).
- *Introducción al cálculo y al análisis matemático.* Courant, Richard; John, Fritz., vol. **1** (**517. C833**).
- *Matemáticas avanzadas para ingeniería. 2.* Kreyszig, Erwin. Limusa. México. (**517. K889-2 / 517. K889-1/ 517. K889**).

Definición 67 *Una función real,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es periódica, de periodo* T*, si verifica* $f(x) = f(x+T)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *y el valor* $\omega = \frac{2\pi}{T}$ *se denomina frecuencia.*

Ejercicio 29 Muestre que:

1. Las funciones sen$x$ y $\cos x$ son funciones periódicas de periodo $T = 2\pi$, y las funciones $\cos \frac{n\pi x}{L}$ y sen$\frac{n\pi x}{L}$ tienen periodo $T = 2L$ y frecuencia $\omega = \frac{\pi}{L}$.
2. Si $f(x)$ es una función periódica de periodo T, para cualquier constante arbitraria a

$$\int_0^T f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx$$

Definición 68 *Una función real,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es* ***par****, si verifica* $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Definición 69 *Una función real,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es* ***impar****, si verifica* $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Definición 70 *Sea* f *una función cuyo límite a derecha* $f(x_0^+)$ *existe en el punto* x_0*. La derivada a derecha se define como sigue:*

$$f'_D(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0^+)}{\varepsilon}$$

cuando el límite existe.

Definición 71 *Sea f una función cuyo límite a izquierda $f(x_0^-)$ existe en el punto x_0. La derivada a izquierda se define como sigue:*

$$f'_I(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{f(x_0^-) - f(x_0 - \varepsilon)}{\varepsilon}$$

cuando el límite existe.

- Si existe $f'(x_0)$, entonces existen ambas derivadas laterales y son iguales, $f'(x_0) = f'_D(x_0) = f'_I(x_0)$.

Series de Fourier

Definición 72 *La serie trigonométrica*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \mathrm{sen} nx)$$

o bien en notación compleja

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}$$

es la serie de Fourier de una función $f(x)$ si sus coeficientes vienen dados por las fórmulas

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \quad n = 1, 2, ... \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{sen} nx\, dx \quad n = 1, 2, ... \\
\gamma_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...
\end{aligned}$$

donde f es alguna función definida en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

- El término $\frac{a_0}{2} = \gamma_0$ es el valor medio de $f(x)$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$.
- Cada uno de los términos de la serie es periódico en x con periodo $T = 2\pi$.
- $\gamma_n = \frac{a_n - i\, b_n}{2}$ para $n > 0$.
- $\gamma_{-n} = \bar{\gamma}_n$.

La serie de Fourier tiene dos aplicaciones fundamentales:

1. **Representar una función definida en el intervalo** $(-\pi, \pi)$.

2. **Representar una función periódica, con periodo** 2π **para todos los valores de** x.

Teorema 61 *Sea f una función continua a tramos en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y periódica de periodo 2π. Entonces su serie de Fourier converge al valor*

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

en todos los puntos x_0 donde f tenga derivada a derecha y a izquierda.

- La convergencia de la serie $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}$, significa la existencia del límite de la suma parcial

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \gamma_n e^{inx} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

- Si las extensiones periódicas de $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas a tramos, la serie de Fourier de f es convergente para todo x real.

Condiciones de Dirichlet

Si bien de acuerdo al teorema anterior la serie de Fourier converge si $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas a tramos, puede demostrarse también para condiciones mucho más generales. Sin embargo, el resultado formulado es suficiente para la mayoría de las aplicaciones. Las condiciones más generales se conocen como Condiciones de Dirichlet.

Definición 73 *Una función $f(x)$ se dice que satisface las condiciones de Dirichlet en un intervalo (a, b), en el cual está definida cuando satisface una de estas dos condiciones:*

1. $f(x)$ es acotada en (a, b), y el intervalo puede ser partido en un número finito de intervalos abiertos parciales, en cada uno de los cuales $f(x)$ es monótona (f tiene un número finito de máximos y mínimos en (a, b)).

2. $f(x)$ tiene un número finito de puntos de discontinuidad infinita en el intervalo (a, b). Cuando se excluyen pequeños entornos alrededor de estos puntos, $f(x)$ es acotada en el resto del intervalo y éste puede ser partido en un número finito de intervalos abiertos parciales, en cada uno de los cuales $f(x)$ es monótona. Además la integral $\int_a^b f(x)dx$ es absolutamente convergente.

Serie de Cosenos

Cuando f es una función par en el intervalo $(-\pi, \pi)$ sus coeficientes tienen valores

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx, \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx \quad n = 1, 2, ... \\ b_n &= 0 \quad n = 1, 2, ... \end{aligned}$$

Por lo tanto su serie de Fourier se reduce a

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Es la serie de Fourier de cosenos. Sirve para:

1. **Representar funciones pares definidas en el intervalo** $(-\pi, \pi)$.
2. **Representar funciones periódicas pares de periodo** 2π**.**
3. **Representar funciones definidas en el intervalo** $(0, \pi)$.

Serie de Senos

Cuando f es una función impar en el intervalo $(-\pi, \pi)$ sus coeficientes tienen valores

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_n &= 0 \quad n = 1, 2, ... \\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\operatorname{sen} nx\,dx \quad n = 1, 2, ... \end{aligned}$$

Por lo tanto su serie de Fourier se reduce a

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx.$$

Es la serie de Fourier de senos. Sirve para:

1. **Representar funciones impares definidas en el intervalo** $(-\pi, \pi)$.
2. **Representar funciones periódicas impares de periodo** 2π**.**
3. **Representar funciones definidas en el intervalo** $(0, \pi)$.

- En consecuencia si una función $f(x)$ está definida solo en el intervalo $[0, \pi]$, podemos extenderla al intervalo $[-\pi, \pi]$ ya sea como una función par o como una función impar y desarrollar en una serie de cosenos o una serie de senos que represente a $f(x)$ en la mitad del intervalo.

Teorema 62 *Si una función f es periódica con periodo $T = 2L$, continua a tramos en $[-L, L]$, tiene como representación la serie*

$$f(x) \backsim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right)$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx \\
a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx \quad n = 1, 2, ... \\
b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx \quad n = 1, 2, ...
\end{aligned}$$

o bien en la forma exponencial

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{\frac{in\pi x}{L}}$$

donde

$$\gamma_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}}\, dx.$$

La serie converge a $\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$ en todos los puntos x_0 donde f tenga derivada a derecha y a izquierda.

Ejercicio 30 Muestre que:

1. Si f es periódica con periodo $T = 2L$ y α un número real cualquiera, entonces

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x)\,dx \\
a_n &= \frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x)\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx
\end{aligned}
$$

2. Los coeficientes de Fourier de una suma de funciones $f_1 + f_2$ son las sumas de los coeficientes correspondientes a f_1 y f_2.

Simetrías

En cualquier función periódica con periódo $T = 2L$ se puede demostrar que hay condiciones de simetría que permiten establecer la existencia o no de determinados términos en la serie de Fourier, lo que ahorra trabajo en el cálculo.

- **Función impar**: $f(x) = -f(-x)$, sólo tienen términos en senos, $a_0 = a_n = 0$ y

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

para $n = 1, 2, ...$; es decir dos veces la integral sobre la mitad del intervalo. Además γ_n es imaginario puro.

- **Función par**: $f(x) = f(-x)$, sólo tienen términos en cosenos y la constante. $b_n = 0$ y

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

para $n = 0, 1, 2, ...$;es decir dos veces la integral de la mitad del intervalo. Además γ_n es real.

- **Simetría de media onda**: Se dice que hay simetría de media onda cuando es $f(x) = -f(x-L)$. Resulta que:

$$a_0 = 0,$$

para n par $(n = 2k)$:

$$a_{2k} = b_{2k} = 0,$$

y para n impar $(n = 2k+1)$:

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{(2k+1)\pi x}{L}\,dx, \\ b_{2k+1} &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\mathrm{sen}\frac{(2k+1)\pi x}{L}\,dx, \end{aligned}$$

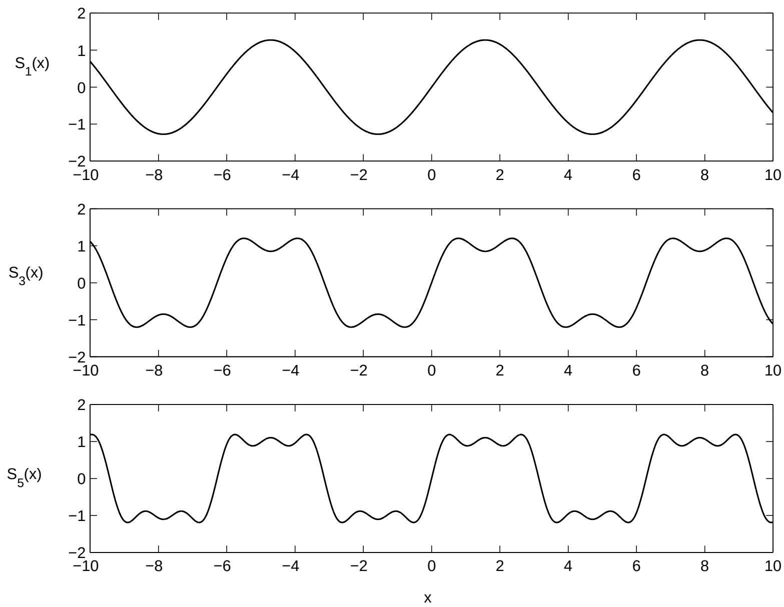
para $k = 0, 1, 2, ...$

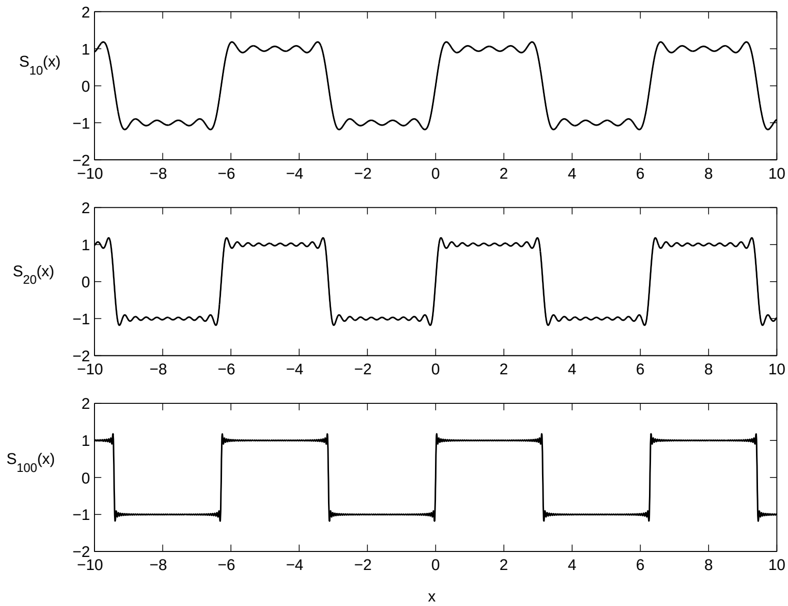
El hecho de ser función par o impar nada tiene que ver con los índices o frecuencias armónicas pares o impares. Además puede hacerse una función par o impar mediante un cambio de ejes.

En resumen si una función es par, o impar, o tiene simetría de media onda, ciertos coeficientes son cero y el cálculo de los restantes puede hacerse integrando sobre medio período y multiplicando el resultado por dos. Más aún, si la onda tiene simetría de media onda y además es par o impar, es suficiente integrar en un cuarto del periodo y luego multiplicar por cuatro.

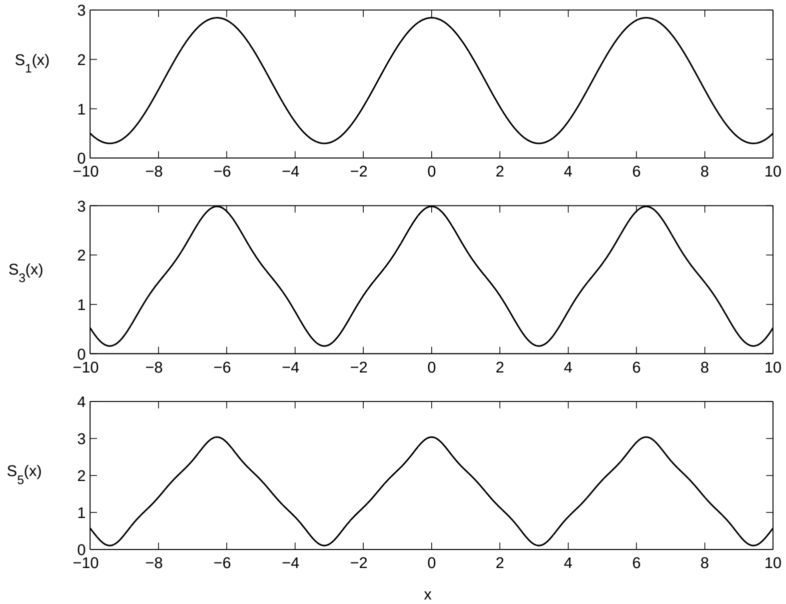
Ejemplos: Sumas parciales de la serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{4}{\pi(2k+1)} \operatorname{sen}(2k+1)x$$

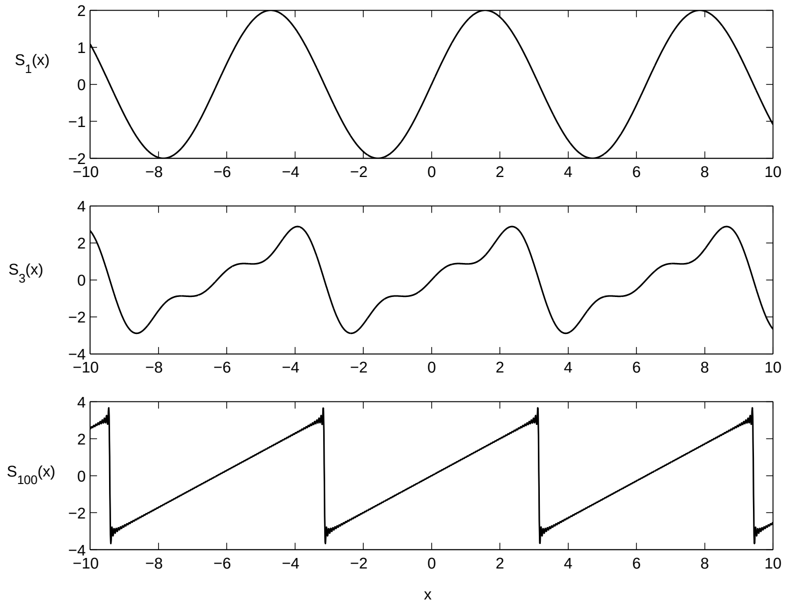




Sumas parciales de la serie: $\frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} \cos(2k+1)x$



Sumas parciales de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^n}{n} \mathrm{sen} nx$



Síntesis de ondas.

Las series de Fourier se pueden utilizar para sintetizar ondas periódicas como una suma infinita de senoidales y/o cosenoidales de la frecuencia fundamental $\omega = \frac{\pi}{L}$ y sus multiplos (armónicos) $n\omega$. Es decir dichas ondas se pueden aproximar mediante la sumas parciales de su serie de Fourier. Por ejemplo, partiendo de la expresión de la onda cuadrada desarrollada en serie y viendo gráficamente sus sumas parciales como muestran las figuras del ejemplo anterior, se puede apreciar como la aproximación comienza a ser mejor a medida que se incrementa la cantidad de términos. Sin embargo siempre permanece una ondulación que semejan "orejas" a ambos lados de la discontinuidad (**fenómeno de Gibbs**). Con el aumento de los términos las mismas se estrechan pero no disminuyen su amplitud que se establece en un 9 % del salto de la discontinuidad. La serie infinita, sin embargo, converge exactamente a la función, excepto en la discontinuidad donde converge al punto medio de la misma.

Convergencia Uniforme

Teorema 63 *Sea f una función continua en el intervalo $[-L, L]$, tal que $f(-L) = f(L)$ cuya derivada f' es continua a tramos en ese intervalo. Entonces la serie*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \mathrm{sen}\frac{n\pi x}{L}\right)$$

y la serie

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{\frac{in\pi x}{L}}$$

convergen a $f(x)$ en el intervalo $[-L, L]$ absoluta y uniformemente.

- La hipótisis de este teorema es equivalente a pedir que la extensión periódica de f sea continua para todas las x y la derivada continua a tramos.

- Una serie de Fourier no puede converger uniformemente en un intervalo que contenga alguna discontinuidad.

Ejercicio 31 Compare el teorma anterior (63) con el teorema (12 y 11) de convergencia uniforme de serie de funciones reales y el test de Weierstrass.

Teorema 64 *Si f es una función continua en el intervalo $[-L, L]$, tal que $f(-L) = f(L)$ y f' es continua a tramos en ese intervalo, entonces la serie de Fourier de $f(x)$*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right)$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{\frac{in\pi x}{L}}$$

es derivable término a término en todo punto donde $f'(x)$ tenga derivada a derecha y a izquierda, y

$$\begin{aligned} f'(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\tfrac{n\pi}{L} a_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} + \tfrac{n\pi}{L} b_n \cos \frac{n\pi x}{L} \right) \\ f'(x) &\sim \sum_{-\infty}^{\infty} \tfrac{in\pi}{L} \gamma_n e^{\frac{in\pi x}{L}}. \end{aligned}$$

Teorema 65 *Si f es una función continua a tramos con derivada continua a tramos en el intervalo $[-L, L]$ y desarrollo en serie de Fourier ($a_0 = 0$)*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right),$$

entonces

$$\int_{-L}^{x} f(u) du \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{La_n}{n\pi} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} - \frac{Lb_n}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \right)$$

con $A_0 = -\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} u f(u) du$.

(Si $a_0 \neq 0$ basta considerar $g(x) = f(x) - a_0/2$).

Identidad de Parseval

Teorema 66 *Si $f(x)$ es acotada e integrable en $[-L, L]$, a_n y b_n los coeficientes de Fourier de f, entonces*

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

o bien

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f^2(x)dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\gamma_n|^2 .$$

De la identidad de Parseval se observa que el valor RMS (medio cuadrático) de la onda total es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los valores RMS de sus componentes:

$$\mathrm{RMS}(f(x)) = \sqrt{\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f^2(x)dx} = \sqrt{\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{a_n}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{b_n}{\sqrt{2}}\right)^2\right)}$$

Orden de decrecimiento de los términos de la serie

Sea f una función contínua a tramos y considere que en todo x_0 se cumple que $f(x_0) = \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$. En los puntos siguientes, considere la continuidad de las extensiones periódicas de f y sus derivadas.

- Si f y f' son continuas a tramos entonces existe una constante k tal que $|a_n| < \frac{k}{n}$, $|b_n| < \frac{k}{n}$ y $|\gamma_n| < \frac{k}{n}$.
- Si f es discontinua pero f y f' son continuas a tramos, el orden de decrecimiento de los coeficientes no puede ser más rápido que $\frac{1}{n}$.
- Si f, f', f'', ..., $f^{(p-1)}$ son continuas y $f^{(p)}$ y $f^{(p+1)}$ continuas a tramos, entonces los coeficientes decrecen al menos como $\frac{1}{n^{p+1}}$. Si además $f^{(p)}$ es discontinua (pero $f^{(p)}$ y $f^{(p+1)}$ continuas a tramos), entonces los coeficientes no decrecen más rápido que $\frac{1}{n^{p+1}}$.

Resumiendo, para conocer el órden de decrecimiento hay que encontrar la primer derivada continua a tramos que presenta una discontinuidad de tipo salto, y quq la siguiente derivada siga siendo continua a tramos.

Espectros en frecuencia.

Puede escribirse una serie de Fourier mediante términos que sólo contengan senos o cosenos, independientemente de que sea o no, par o impar. Utilizando la relaciones trigonométricas:

$a\cos x + b\,\mathrm{sen}x = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\cos[x - \tan^{-1}(\frac{b}{a})]$

entonces la serie tendrá la forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega x - \phi)$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{sen}(n\omega x - \theta)$$

con:

$c_n = 2\,|\gamma_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\phi = \arg(\bar{\gamma}_n) = \tan^{-1}(\frac{b_n}{a_n})$, y $\theta = \phi - \frac{\pi}{2}$. Sin embargo sigue siendo una forma más compacta la serie de exponenciales:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{in\omega x}$$

La graficación de este desarrollo en serie es muy clara si se lo hace en función de la frecuencia, lo que da lugar a representaciones denominadas Espectros en Frecuencia.

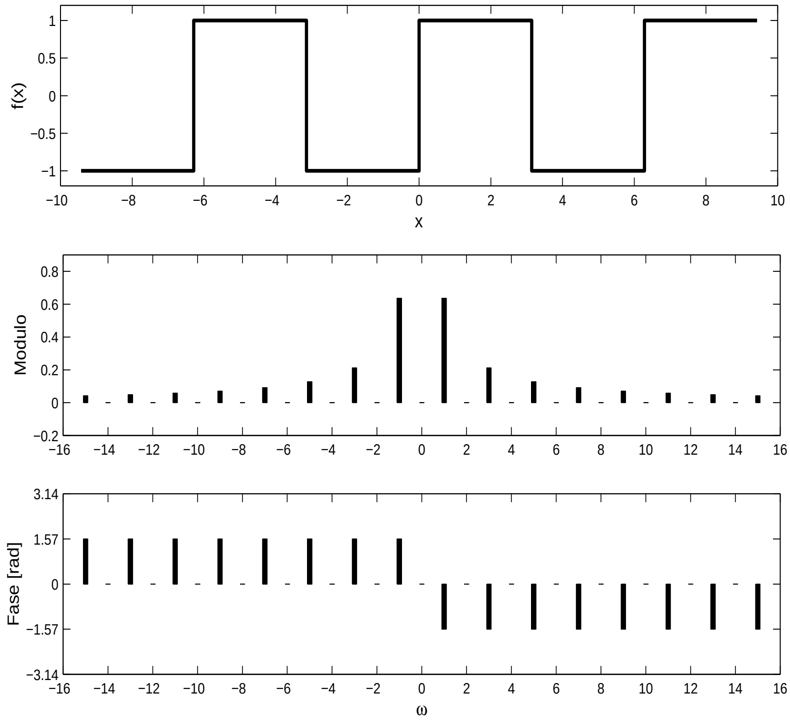
Como se deben indicar dos datos para cada componente: amplitud y fase, se obtienen los espectros de Amplitud y de Fase.

En ambos casos se tiene sólo valores para un número entero de veces la frecuencia fundamental $\omega = \frac{\pi}{L}$, lo que implica un espectro de líneas, discreto, y no una curva continua.

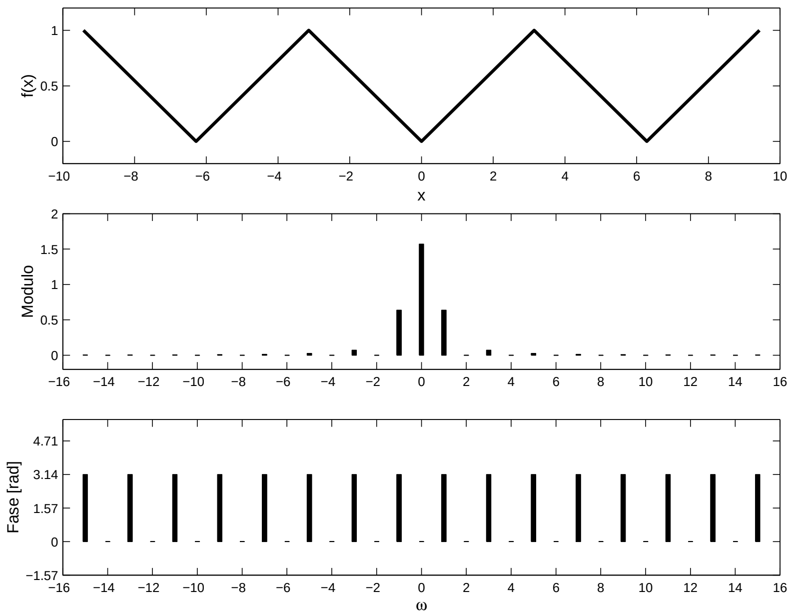
Si la serie está desarrollada en funciones senos y cosenos se debe pasar primero a la forma de solo términos en senos, cosenos o exponenciales para que pueda ser representada en frecuencia.

En los siguientes gráficos se muestran para cada onda el espectro en frecuencia, el módulo y la fase de los coeficientes de Fourier de sus correspondientes series de exponenciales complejas, es decir Módulo:$|\gamma_n|$ y Fase: Arg (γ_n)

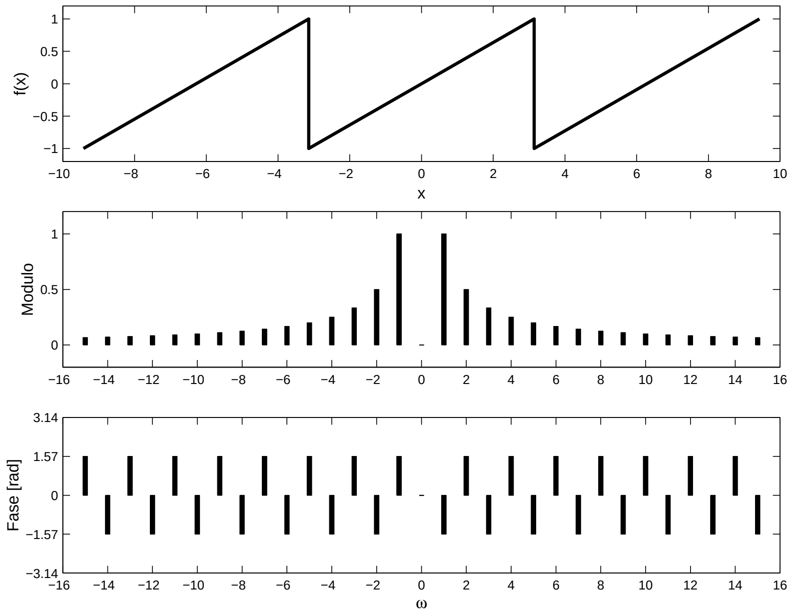
Onda cuadrada y su espectro en frecuencia: $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2i}{\pi(2k+1)} e^{i(2k+1)x}$



Onda triangular y su espectro en frecuencia: $\frac{\pi}{2} - \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi(2k+1)^2} e^{i(2k+1)x}$



Onda diente de sierra y su espectro en frecuencia: $\displaystyle\sum_{\substack{-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^n i}{n} e^{inx}$



Transformaciones en el plano complejo

Si una función compleja $w = f(z)$ está definida en un dominio D del plano z, entonces a cada punto de D le corresponde un punto en el plano w. De esta manera se tiene un mapeo, aplicación o transformación de D sobre el rango de valores de $f(z)$ en el plano w, que se denomina imagen de D.

Este enfoque geométrico del análisis complejo ayuda a visualizar la naturaleza de una función compleja, al considerar el modo en el que la función aplica ciertas curvas y regiones.

Transformaciones lineales

Primer tipo

$$w = \alpha z$$

donde α es una constante compleja.

- $|w| = |\alpha|\,|z|$
- $\arg w = \arg\alpha + \arg z$

Esta transformación:

- dilata o contrae según $|\alpha| > 1$ ó $|\alpha| < 1$.
- rota un ángulo $\arg\alpha$.

Segundo tipo

$$w = z + \beta$$

donde β es una constante compleja.

- Es una traslación mediante el vector β.

Transformación lineal general

$$w = \alpha\, z + \beta$$

($\alpha \neq 0$) es la composición de las transformaciones:

$$Z = \alpha\, z \qquad \text{y} \qquad w = Z + \beta$$

- Es una dilatación o contracción y una rotación, seguida de una traslación.

Inversión

$$w = \frac{1}{z}$$

Es la composición de dos transformaciones:

- $Z = \frac{z}{|z|^2}$, una inversión con respecto al círculo unitario.
- $w = \bar{Z}$, una reflexión con respecto al eje real.

Si $z = x + i\, y$ y $w = u + i\, v$, entonces

$$\begin{array}{ll} u = \frac{x}{x^2+y^2} & x = \frac{u}{u^2+v^2} \\ v = \frac{-y}{x^2+y^2} & y = \frac{-v}{u^2+v^2} \end{array}$$

Ejercicio 32 Pruebe que la transformación $w = \frac{1}{z}$ transforma círculos y rectas en círculos o rectas.

Transformación Bilineal

$$w = \frac{a\,z + b}{c\,z + d}$$

donde a, b, c y d son constantes complejas y $ad - bc \neq 0$.

- Cuando $c = 0$ se reduce a una transformación lineal.
- Cuando $c \neq 0$, la transformación admite la expresión

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c}\frac{1}{c\,z + d}$$

Es una composición de tres transformaciones

$$Z_1 = c\,z + d, \qquad Z_2 = \frac{1}{Z_1} \qquad \text{y} \qquad Z_3 = w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} Z_2$$

Por lo tanto una transformación bilineal siempre transforma círculos y rectas en círculos o rectas.

Existe siempre una transformación bilineal que aplica tres puntos distintos z_1, z_2, z_3 sobre tres puntos distintos w_1, w_2, w_3, y se verifica la siguiente fórmula:

$$\frac{w - w_1}{w - w_3}\frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3}\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

Ejercicio 33 Halle una transformación bilineal que aplique el círculo unitario en el plano z sobre la mitad superior del plano w.

Transformaciones conformes

Definición 74 *Una transformación $w = f(z)$, se llama conforme en un punto z_0, si f es analítica en él y $f'(z_0) \neq 0$.*

Las transformaciones conformes tienen la propiedad de conservar los ángulos, mantienen la forma localmente. Si un par de curvas se cortan en un punto z_0 donde una transformación $w = f(z)$ es conforme, sus curvas imágenes se cortan en $w_0 = f(z_0)$ manteniendo el mismo ángulo (magnitud y sentido) entre sus rectas tangentes que el de las curvas originales.

Teorema 67 *Una transformación $w = f(z)$ que sea conforme en un punto z_0 tiene una inversa local en z_0.*

El conocimiento de que $f'(z_0) \neq 0$ es suficiente para llegar a la conclusión de que la transformación es inyectiva (uno a uno) si se restringe a un entorno de z_0 suficientemente pequeño y se puede asegurar que para la imagen de ese pequeño entorno existe una transformación inversa. Pero aún cuando sea $f'(z_0) \neq 0$ en todos los puntos de un dominio, no se puede afirmar que la aplicación sea inyectiva en ese dominio. Por eso diferenciamos en decir cuándo una aplicación es conforme en cada uno de los puntos de un dominio y cuándo es conforme sobre todo el dominio.

Definición 75 *Una transformación $w = f(z)$, definida en un dominio D, se llama* ***conforme en cada uno de sus puntos****, si f es analítica en D y su derivada no tiene ceros en D.*

Definición 76 *Una transformación $w = f(z)$, definida en un dominio D, se llama* ***conforme en todo*** *D, si f es es inyectiva (uno a uno) y analítica en D.*

Cuando la transformación es biyectiva en un dominio D, es decir tiene inversa, y además ambas son continuas, transforma puntos interiores de un conjunto contenido en D, en puntos interiores del conjunto imagen. Del mismo modo los puntos frontera del conjunto original se transformarán en puntos frontera del conjunto imagen.

Teorema 68 *Supongamos que una función analítica $w = f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ aplica un dominio D_z del plano z sobre un dominio D_w del plano w. Si $h(u, v)$ es una función armónica definida sobre D_w, entonces la función $H(x, y) = h(u(x, y), v(x, y))$ es armónica sobre D_z.*

Ejercicio 34 Conservación de ángulos y puntos interiores

1. Sea A el sector angular de 60^o (a partir del eje real positivo) del círculo unitario:

   a) Encuentre la imagen al aplicarle la transformación $w = z^3$.¿Se cumple la propiedad de conservación de ángulos?

   b) Aplique la transformación $w = z^6$. El punto $z = \frac{1}{2}$ es un punto frontera de A. ¿Es la imágen de este punto también un punto frontera?

2. Muestre que si una transformación y su inversa son continuas entonces la imagen de un punto interior de un conjunto es un punto interior del conjunto imagen.

Principio de variación del argumento.

Sea C un contorno cerrado simple orientado positivamente en el plano z, y sea f una función analítica sobre C. Supongamos que f no tiene ceros sobre C. La imagen Γ de C bajo la tranformación $w = f(z)$ es un contorno cerrado en el plano w.

Cuando un punto z recorre C en sentido positivo, su imagen w recorre Γ en una determinada dirección que fija una orientación sobre Γ. Como f no tiene ceros sobre C, el contorno Γ no pasa por el origen del plano w.

El cambio de $\arg w$ al describir Γ una vez en su sentido de orientación (inicia con $\arg w = \phi_0$ y finaliza en el mismo punto con $\arg w = \phi_1$) es

$$\Delta_C \arg f(z) = \phi_1 - \phi_0,$$

es un múltiplo de 2π y $\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z)$, es el número de veces que el punto w gira en torno al origen en el plano w, cuando z describe C una vez en sentido positivo.

Teorema 69 *Sea C un contorno cerrado simple, en sentido positivo, y sea f una función analítica dentro y sobre C, excepto en un número finito de polos interiores a C. Supongamos además que f no tiene ceros sobre C. Entonces*

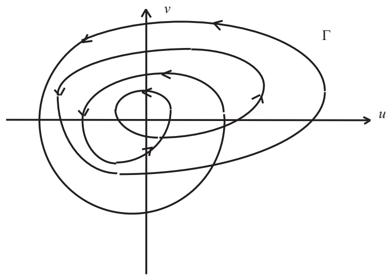
$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z) = \frac{\phi_1 - \phi_0}{2\pi} = Z - P$$

donde Z es el número total de ceros de f dentro de C y P es el número total de polos de f dentro de C (contando su multiplicidad, es decir un polo doble o cero doble se cuentan como dos), ϕ_0 es *el argumento de la imagen del punto inicial de C al aplicarle la transformación $w = f(z)$, y ϕ_1 es el argumento de la imagen del punto final, si bien coincide con el punto inicial, el argumento resultante tiene en cuenta su variación continua luego de recorrer toda la curva C.*

Ejercicio 35 Principio de Variación del Argumento

1. Bajo las mismas condiciones del teorema anterior pruebe que $\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$, y luego que $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = Z - P$.

2. Sea C el círculo unidad $|z| = 1$ descripto en sentido positivo. Hallar el valor de $\Delta_C \arg f(z)$ para las funciones: (a) $f(z) = z^2$, $\qquad (b)$ $f(z) = \frac{z^3+2}{2z+1}$.



3. Sea f una función analítica dentro y sobre un contorno cerrado simple C, excepto en un único punto interior a C, que es un polo simple de f. Además f no se anula en ningún punto de C. Sea Γ la imagen de C bajo la transformación $w = f(z)$, la cual se muestra en la figura. Determinar el valor de la variación del agumento de f sobre C, y también el número de ceros de f interiores a C.

Espacio de funciones y Series de Fourier

Bibliografía

- *Series de Fourier y problemas de contorno.* Churchill, Ruel V. (**517.2. C473-1**).
- *Matemáticas avanzadas para ingeniería.* Kreyszig, Erwin. Limusa. México. (**517. K889-2 / 517. K889-1/ 517. K889**).

Los espacios vectoriales tienen un rol muy importante en muchas ramas de la matemática y sus aplicaciones. En muchos problemas teóricos y prácticos se trabaja con conjuntos de elementos y operaciones que tienen propiedades análogas al espacio vectorial Euclideano $\mathbb{R}^n$ (muy conocido en los primeros cursos de algebra). Se verán ahora otros espacios, en especial espacios vectoriales de funciones.

Espacios Vectoriales

Definición 77 *Un espacio vectorial sobre un cuerpo K es un conjunto no-vacío X de elementos que llamaremos vectores junto con dos operaciones algebraicas: suma de vectores $(X \times X \to X)$ y multiplicación por escalares $(K \times X \to X)$, los escalares son los elementos de K, las cuales verifican $\forall x, y, z \in X$ y $\forall \alpha, \beta \in K$:*

1. $x + y = y + x$

2. $x + (y + z) = (x + y) + z$

3. $\exists 0 \in X$ *tal que* $x + 0 = x$

4. $\exists - x \in X$ *tal que* $x + (-x) = 0$

5. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

6. $1x = x$

7. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

8. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

Generalmente K es el cuerpo de los números reales ($\mathbb{R}$) *o el cuerpo de los números complejos* ($\mathbb{C}$)

Ejemplos

- $\mathbb{R}^n$ con las operaciones usuales de vectores es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (con escalares reales o lo que se suele decir es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial).
- $\mathbb{C}^n$, el conjunto de vectores de dimensión n, cuyas componentes son números complejos, con las operaciones usuales de vectores (suma componente a componente, y multiplicación de cada componente por el escalar) es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.
- $C[a, b]$, el conjunto de funciones continuas reales definidas en el intervalo $[a, b]$, con las operaciones usuales de suma de funciones y multiplicación por constantes: $(f + g)_{(x)} = f(x) + g(x)$, y $(\alpha f)_{(x)} = \alpha f(x)$, es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
- $C^n[a, b]$, el conjunto de funciones reales con n derivadas continuas definidas en el intervalo $[a, b]$, con las operaciones usuales de funciones (como en $C[a, b]$) es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
- El conjunto de las funciones de variable compleja enteras es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.
- $CT[a, b]$, el conjunto de funciones reales continuas a tramos en el intervalo $[a, b]$, con las operaciones usuales de funciones (como en $C[a, b]$) es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Independencia lineal

Definición 78 *Un conjunto finito de vectores* $M = \{x_1, x_{2,\ldots}, x_n\}$ *en un espacio vectorial* X *es* ***linealmente independiente*** *si la ecuación*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. *Un subconjunto arbitrario* M *de* X *es linealmente independiente si todo subconjunto no-vacío y finito de* M *es linealmente independiente. Se dice que* M *es* ***linealmente dependiente*** *si no es linealmente independiente.*

Definición 79 *Un subespacio de un espacio vectorial* X *es un subconjunto no vacío* Y *de* X *tal que para todo* $y_1, y_2 \in Y$ *y para todos los escalares* α, β *se tiene que* $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$. *Por lo tanto* Y *es en sí mismo un espacio vectorial con las operaciones inducidas por las operaciones de* X *restringidas a* Y.

Ejercicio 36 Muestre que:

1. $C[a, b]$ es un espacio vectorial

2. $X = \{f : [a, b] \to \mathbb{C} \mid f(t) = u(t) + i\, v(t)$, con $u, v \in C[a, b]\}$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

3. Las funciones sen$x$, sen$2x, \ldots,$ sennx son linealmente independientes en $C[-\pi, \pi]$ para cualquier número natural n. [Sugerencia: sea $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \text{sen} kx$; multiplicar por sen$jx$ donde $j = 1, \ldots, n$; e integrar de $-\pi$ a π].

4. El conjunto infinito

$$\{\text{sen}x, \text{sen}2x, \ldots, \text{sen}nx, \ldots\} = \{\text{sen}nx,\ \text{con } n \in \mathbb{N}\}$$

   es linealmete independiente en $C[-\pi, \pi]$.

5. $C[a, b]$ es un subespacio de $CT[a, b]$.

6. El conjunto $CP[a, b]$ de funciones continuas pares en el intervalo $[a, b]$ es un subespacio de $C[a, b]$

Definición 80 *Un producto escalar o producto interior sobre X es una función de $X \times X \to K$, es decir a todo par de vectores x e y le asocia un escalar el cual se escribe así*

$$\langle x, y\rangle$$

y verifica las siguientes propiedades $\forall x, y, z \in X$ y $\forall \alpha \in K$:

1. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
2. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$
3. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
4. $\langle x, x\rangle \geq 0$
5. $\langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

   (la propiedad 3 indica que $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}^+$, aún cuando $K = \mathbb{C}$).

Por ejemplo $\forall$ par de vectores x, y en $\mathbb{R}^2$ el producto escalar es

$$\langle x, y\rangle = \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Un producto escalar en $C[a, b]$ es:

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Entiéndase que no es la única manera de definir un producto escalar en $C[a, b]$, por ejemplo podría incluirse en la integral alguna función de peso.

Definición 81 *En un espacio vectorial X con producto escalar se dice que dos elementos $x, y \in X$ son ortogonales si*

$$\langle x, y\rangle = 0.$$

Definición 82 *En un espacio vectorial X con producto escalar se define a la norma de vectores inducida por el producto escalar como:*

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} \quad \forall x \in X.$$

En $C[a,b]$:

$$\|f(x)\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$$

En en el espacio de funciones continuas a tramos, $CT[a,b]$, la integral $\int_a^b f(x)g(x)dx$ no define un producto escalar. No cumple la propiedad 5, pues $\int_a^b f^2(x)dx$ es nula no sólo si la función f es la función cero, sino que puede ser una función nula (una función nula toma valor cero casi en todo el intervalo, excepto en un número finito de puntos). Esto se soluciona considerando que dos funciones en $CT[a,b]$ son idénticas si su diferencia es una función nula. Es decir si se considera que un vector de $CT[a,b]$ en realidad es un conjunto de funciones cuya diferencia es una función nula. Por ejemplo el vector cero está identificado por el conjunto de funciones nulas, la función constante 1 se identifica con la función $\frac{x}{x}$, y con toda función de la forma $1 + N(x)$ donde N es una función nula. Con esta salvedad la integral $\int_a^b f(x)g(x)dx$ es un producto escalar en $CT[a,b]$.

Cuando se trabaja en espacios de funciones complejas el producto escalar se define así: $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$.

Un conjunto de funciones ortogonales se suele llamar **sistema de funciones ortogonales**.

Definición 83 *Un conjunto de funciones $\{\phi_n(x)\}$ se dice que es un* ***sistema ortonormal*** *si*

$$\langle \phi_n(x), \phi_m(x)\rangle = \begin{cases} 0 & si\ n \neq m \\ 1 & si\ n = m \end{cases}.$$

Definición 84 *Dado un sistema ortonormal de funciones $\{\phi_n(x)\}$ se dice que la serie*

$$c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\phi_n(x)$$

es la ***serie de Fourier generalizada*** *de la función f cuando los c_n son los* ***coeficientes de Fourier*** *$c_n = \langle f(x), \phi_n(x)\rangle$.*

Ejercicio 37 Producto escalar. Polinomios ortonormales. Desigualdad de Bessel. Identidad de Parseval.

1. Sea $f(x) = x$ y $g(x) = 1 - x^2$ en el espacio $C[0,1]$. Calcule $\langle f, g\rangle$. ¿Son ortogonales?

2. Sea $P_0(x) = a_0$ y $P_1(x) = b_0 + b_1x$. Encuentre los números a_0, b_0, b_1 para que $\{P_0, P_1\}$ sea un conjunto ortonormal en $C[-1,1]$.

3. Muestre que el conjunto de funciones $\{\frac{1}{2}, \cos x, \text{sen}x, \cos 2x, \text{sen}2x, \ldots, \cos nx, \text{sen}nx\}$ es ortogonal en $C[-\pi,\pi]$. A partir de este conjunto obtenga un conjunto ortonormal.

4. Calcular los coeficientes de Fourier de la función e^x en $C[-1,1]$ correspondientes al conjunto de polinomios ortonormales $\{P_0, P_1\}$ encontrado en el ejercicio 9.

5. Suponer que $v_1, \ldots, v_n$ es un conjunto ortonormal finito en un espacio vectorial V. Demostrar que si v es cualquier vector en V

$$\sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle^2 \leq \|v\|^2 .$$

Esta desigualdad es un caso especial de la desigualdad de Bessel. [Sugerencia: establecer $y = v - \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle v_i$ y calcular $\|y\|^2$].

6. Suponer que $v_1, \ldots, v_n$ es una base ortonormal de un espacio vectorial V de dimensión finita. Si v es cualquier vector en V, muestre que

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle^2.$$

Aproximación de funciones en el sentido de minimizar la norma o mínimos cuadrados

Teorema 70 *Dado un sistema ortonormal $\{\phi_n(x)\}$ en el intervalo $[a,b]$,la suma parcial $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n\phi_n(x)$ de la serie de Fourier generalizada de una función $f(x)$, es la mejor aproximación en el sentido de mínimos cuadrados, es decir la integral*

$$\int_a^b (f(x) - S_N(x))^2 dx$$

es mínima cuando los coeficientes son los coeficientes de Fourier ($c_n = \langle f(x), \phi_n(x)\rangle$).

El valor de $\left\| f(x) - \sum_{n=0}^{N} c_n\phi_n(x) \right\|$ nos indica una medida del error de aproximación. Cuando los coeficientes son los de Fourier se tiene que

$$\sum_{n=0}^{N} c_n^2 \leq \|f(x)\|^2$$

de donde es fácil ver que cuando $N \to \infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \leq \|f(x)\|^2$$

que se conoce como desigualdad de Bessel. Si se cumple que el error de aproximación tiende a cero cuando $N \to \infty$, se verifica la igualdad

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 = \|f(x)\|^2$$

conocida como Identidad de Parseval. Si en un espacio de funciones se verifica la identidad de parseval para todas sus funciones, se dice que el sistema ortonormal es **completo** en dicho espacio. Se puede ver que un sistema $\{\phi_n(x)\}$ es completo cuando en el espacio no existe una función que sea ortogonal a todos las funciones del sistema.

Ejercicio 38 Compare la aproximación de e^x utilizando los coeficientes de Fourier calculados en el ejercicio anterior [$e^x \sim c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x)$] y una aproximación lineal con la fórmula de Taylor [$e^x \sim f(0) + f'(0)\, x$]. Grafique la función y las dos aproximaciones en el intervalo $[-1, 1]$. Calcule el error de aproximación en ambos casos, ¿cuál es menor?

Integral de Fourier y Transformada de Fourier

Bibliografía

- *Matemáticas avanzadas para ingeniería. 2.* Kreyszig, Erwin. Limusa. México. (**517. K889-2 / 517. K889-1/ 517. K889**).
- *Cálculo Avanzado* Kaplan, W. (**517 K14-2**).
- *The Fourier integral and its applications* Papoulis, A. (**517.7. P199**).
- *The fast Fourier transform* Brigham, E. O. (**A-6.678.** Inst. Mat.)

De la Serie a la Integral de Fourier

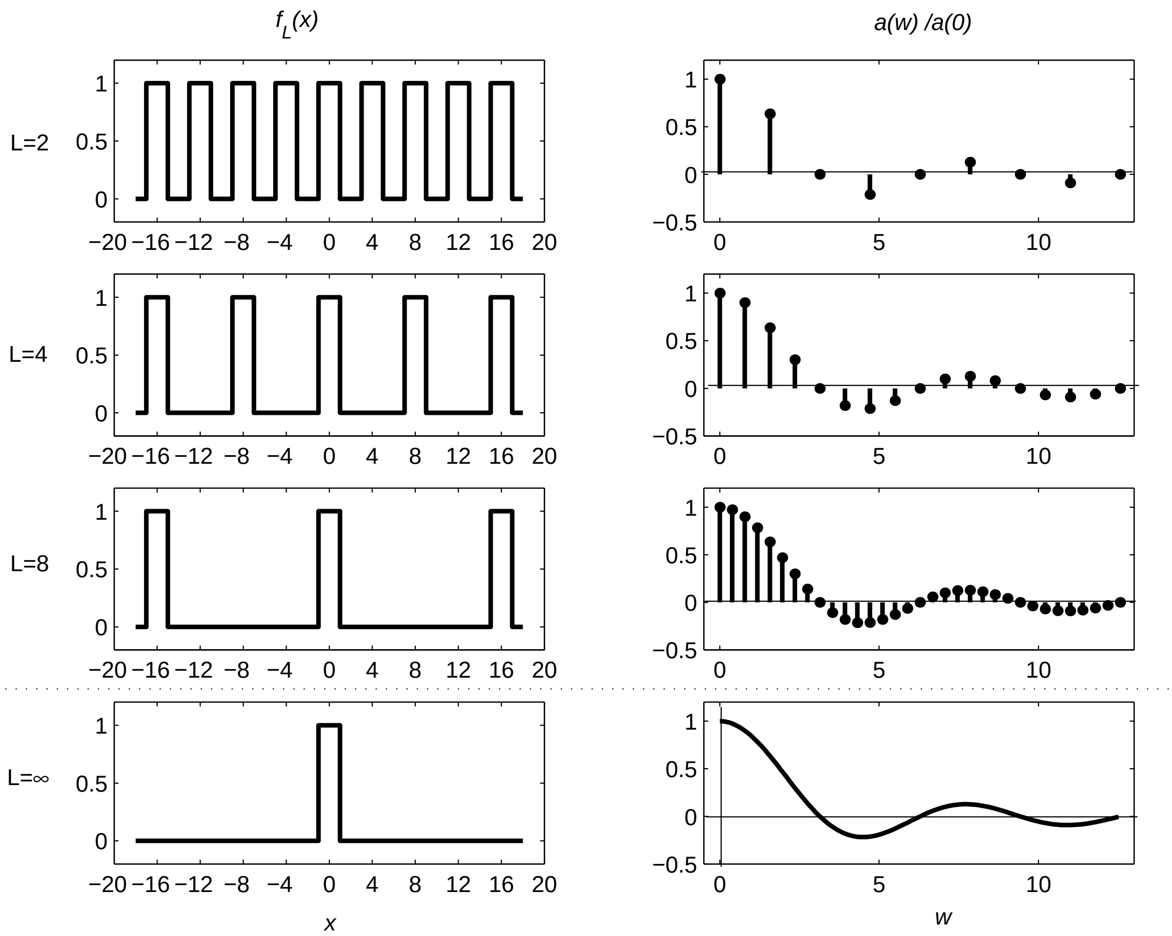
Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$, si bien esta función no es periódica se pueden utilizar series de Fourier para realizar aproximaciones en el intervalo $[-L, L]$ por medio de funciones periódicas de período $T = 2L$. Por ejemplo sea $f_L(x) = f(x)$ si $x \in [-L, L]$, y $f_L(x + 2L) = f_L(x)\ \forall x$. El desarrollo de Fourier es:

$$f_L(x) \sim \frac{1}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/L)}{n\pi/L} \cos(n\pi x/L)$$

o bien

$$f_L(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{L} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/L)}{n\pi/L} e^{in\pi x/L}.$$

La variable discreta $w = \frac{n\pi}{L}$ que aparece en los términos de la serie de Fourier se denomina frecuencia, $\frac{\pi}{L}$ es la frecuencia fundamental, y las demás son múltiplos (armónicos) de ésta. El valor de $\frac{w}{2\pi}$ indica la cantidad de ciclos periódicos contenidos en un intervalo de longitud unitaria de x. En el siguiente gráfico se muestran los coeficientes de Fourier de $f_L(x)$ en función de la frecuencia w.



Obsérvese que $\lim\limits_{L\to\infty} f_L(x) = f_\infty(x) = f(x)$. Como $f(x)$ no es periódica, no se puede desarrollar como una serie de Fourier, sin embargo es posible expresarla con la siguiente integral:

$$f(x) \sim \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{2}{\pi} \frac{\operatorname{sen} w}{w} \cos(wx) dw$$

o bien

$$f(x) \sim \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{sen} w}{w} e^{iwx} dw,$$

esto queda justificado en el siguiente teorema:

Teorema 71 *Si $f(x)$ es continua a tramos en todo intervalo finito y tiene derivada a derecha y a izquierda en todo punto y la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$ existe, entonces $f(x)$ se puede representar mediante una integral de Fourier. En todo punto el valor de la integral de Fourier es el promedio de los límites laterales de $f(x)$ en ese punto.*

$$f(x) \sim \int_0^\infty (A(w)\cos(wx) + B(w)\mathrm{sen}(wx))\, dw$$

donde

$$\begin{aligned} A(w) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(wx)\, dx \\ B(w) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{sen}(wx)\, dx \end{aligned}$$

o en forma compleja

$$f(x) \sim \text{V.P.C.} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(w)\, e^{iwx} dw$$

donde

$$\mathcal{F}(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-iwx} dx$$

$\mathcal{F}(w)$ es la transformada de Fourier de $f(x)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(w) &= \Phi(f(x))_{(w)} \\ f(x) &= \Phi^{-1}(\mathcal{F}(w))_{(x)} \\ \mathcal{F}(w) &\leftrightarrow f(x) \end{aligned}$$

Ejercicio 39 Muestre que:

1. $\mathcal{F}(w) = \frac{A(w)-iB(w)}{2}$.

2. Si f es par entonces $B(w) = 0$ (integral de cosenos).

3. Si f es impar entonces $A(w) = 0$ (integral de senos).

4. La función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \\ \pi e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

se puede escribir como la integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos xw + w\operatorname{sen} xw}{1+w^2} dw$$

[sug. calcular $A(w)$ y $B(w)$]

5. La integral

$$\int_0^\infty \frac{w^3 \operatorname{sen} xw}{4+w^4} dw = \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos x$$

cuando $x > 0$, ¿a qué función converge la integral anterior cuando $x \leq 0$?

6. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } |x| < 1 \\ 0 & \text{cuando } |x| > 1 \end{cases}$

   a) encontrar la transformada de Fourier de $f(x)$.
   [Ayuda: $\mathcal{F}(w) = \Phi(f(x))_{(w)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-iwx} dx$]

   b) representar a $f(x)$ como una integral compleja de Fourier.
   [Ayuda: $f(x) = \text{V.P.C.} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(w)\, e^{iwx} dw$].

Algunas propiedades de la transformada de Fourier

1. $\Phi(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))_{(w)} = c_1\Phi(f_1(x))_{(w)} + c_2\Phi(f_2(x))_{(w)}$ (**Linealidad**)
2. $\Phi(f^{(k)}(x))_{(w)} = (iw)^k\Phi(f(x))_{(w)}$ (**Derivadas**)
3. $\Phi(f(x-c))_{(w)} = e^{-icw}\Phi(f(x))_{(w)}$ (**Traslación en tiempo**)
4. $\Phi(e^{icx}f(x))_{(w)} = \Phi(f(x))_{(w-c)}$ (**Traslación en frecuencia**)
5. Si $\Phi(f(x))_{(w)} = \mathcal{F}(w)$ entonces $\Phi(2\pi\mathcal{F}(x))_{(w)} = f(-w)$ (**Dualidad**)
6. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(w)|^2\, dw$ (**Parseval**)
7. $\Phi(f * g)_{(w)} = \Phi(f)_{(w)}\Phi(g)_{(w)}$

donde f, g, f_1 y f_2 tienen transformada de Fourier y el **producto de convolución**:

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g(x-u)\, du.$$

Relaciones entre las transformadas de Fourier y Laplace.

- Si la abscisa de convergencia absoluta de la transformada de Laplace de una función $f(x)$ es $\alpha < 0$, entonces $\Phi(f(x)h(x))_{(w)} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{L}(f(x))_{(iw)}$, donde $h(x)$ es la función escalón (Heaviside).
- $\mathcal{L}(f(x))_{(s)} = 2\pi\Phi(e^{-\sigma x}f(x)h(x))_{(w)}$ donde $s = \sigma + iw$ y $\sigma > \alpha$, la abscisa de convergencia absoluta de $f(x)$.

Fórmula de Inversión Compleja de Laplace

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\text{V.P.C.}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st}F(s)\, ds$$

Si $F(s)$ es la transformada de Laplace de una función $f(t)$ la cual es continua a tramos, de orden exponencial, $O(e^{\alpha t})$, entonces si $f'(t)$ es continua a tramos, la integral de la fórmula de inversión es convergente sobre la recta $\text{Re}(s) = \gamma$, donde $\gamma > \alpha$. En todo punto $t_0 > 0$ la integral converge a $(f(t_0+) + f(t_0-))/2$, en $t = 0$ converge a $f(0+)/2$ y cuando $t < 0$ tiene valor nulo.

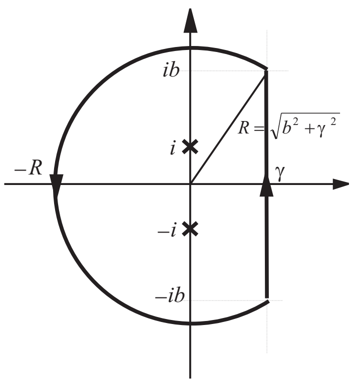
Ejercicio 40

1. Muestre la relaciones entre las transformadas de Fourier y Laplace, y úselas para encontar $\Phi(e^{-ax}h(x))_{(w)}$ con $a > 0$.

2. Use la propiead 3 y el ejercicio anterior par encontrar la transformada de Fourier de la función $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } |x-2| < 1 \\ 0 & \text{cuando } |x-2| > 1 \end{cases}$.

3. Sea $h(x)$ es la función escalón (Heaviside), obtenga el producto de convolución (como se definió en las propiedades) de $h(x) * (xh(x))$

4. Utilice la fórmula de inversión Compleja de Laplace para antitransformar $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$. Indique también cómo es $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$ cuando $t \leq 0$ [Ayuda: utilice el contorno de integración de la figura, el teorema de los residuos y luego haga $b \to \infty$]



Funciones Impulsivas

Bibliografía

- *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería.* James, G.,Pearson Educación
- *The Fourier integral and its applications* Papoulis, A. (**517.7. P199**).
- *The fast Fourier transform* Brigham, E. O. (**A-6.678.** Inst. Mat.)
- *Cálculo Avanzado* Kaplan, W. (**517 K14-2**)

Ciertos problemas físicos llevan a intentar extender el concepto de función de manera que incluya nuevos objetos matemáticos, llamados *funciones generalizadas* o *distribuciones*, que difieren notablemente de las funciones tradicionales. En esta parte del curso se dará una introducción intuitiva. Una de las distribuciones más utilizada es la que lleva el nombre de Dirac, *impulso* o delta de Dirac, que fue quien la utilizó en mecánica cuántica en los años 1920. Un matemático francés: L. Schwartz (1915-2002), fue el creador de la Teoría de Distribuciones en 1948.

Algunos sistemas mecánicos suelen estar sometidos a una fuerza externa (o a una tensión eléctrica en el caso de los circutitos eléctricos) de gran magnitud, que solamente actúa durante un tiempo muy corto. Por ejemplo, una descarga elétrica podría caer sobre el ala vibrante de un avión; a un cuerpo sujeto a un resorte podría dársele un fuerte golpe con un martillo, una pelota (de beisbol, de golf o de tenis) inicialmente en reposo, podría ser enviada velozmente por los aires al ser golpeada con violencia con un objeto como un bate de beisbol, un bastón de golf o una raqueta de tenis. La función impulso puede servir como un modelo para tal fuerza.

Otro ejemplo físico sencillo es el de la densidad de la masa distribuida a lo largo de una recta en el eje x (también podría considerarse la densidad de carga eléctrica distribuida sobre una recta). Si $\rho(x)$ es la densidad, entonces $\int_a^b \rho(x)dx$ deberá dar la masa total en el intervalo $[a, b]$. Supóngase ahora toda la masa concentrada en una particula de masa igual a 1, localizada en el origen. Resulta tentador asignar a $\int_a^b \rho(x)dx = 0$ si el intervalo $[a, b]$ no contiene al origen y $\int_a^b \rho(x)dx = 1$ si el intervalo $[a, b]$ contiene al origen. Esto conduce a que $\rho(x) = 0$ cerca del origen y $\rho(x)$ no estaría acotada en $x = 0$. Esta particular función de densidad es la *función delta de Dirac.*

Como se mencinó anteriormente un ejemplo también sencillo es el de una partícula de masa m que está inmóvil y en $t = 0$ recibe un golpe que la pone en movimiento a velocidad constante $v_{0.}$ La velocidad v se puede escribir en términos de la función escalón $h(t)$ (o de Heaviside), $v(t) = v_0 h(t)$. De la segunda ley de Newton deducimos la fuerza F que se ejerce sobre la partícula, $F = m\frac{dv}{dt} = mv_0\delta(t)$, donde δ es la función de Dirac, es decir la fuerza es un impulso, es nula en todo instante, excepto en el instante del golpe. Además resulta natural pensar que la derivada del escalón $h(t)$ es $\delta(t)$, en el sentido de las distribuciones.

Definición 85 *La función delta δ de Dirac generalmente se define de una de las siguientes tres maneras:*

1. Por la ecuación

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1, \quad \delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0$$

2. Como límite de una sucesión de funciones $\delta(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ que verifican

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\, dt = 1, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0 \quad \forall t \neq 0$$

3. Por la propiedad $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, f(t)\, dt = f(0)$ donde $f(t)$ es una función arbitraria continua en el origen.

Las propiedades de la primer definición no son las usuales de una función ordinaria. En realidad hay que entender que lo importante en la definición de la función de Dirac son sus propiedades, y que la forma de definirla es a través de sus propiedades y no como uno está acostumbrado a definir una función ordinaria.

La teoría matemática que justifica estas cuestiones es la *Teoría de Distribuciones* y corresponde a la tercer definición. El concepto de distribución o función generalizada T es un proceso de asignación a una función arbitraria $\phi(t)$ un número α real o complejo. Es decir, una distribución T, es un mapeo:

$$\phi(t) \xrightarrow{T} \alpha,$$
$$T[\phi(t)] = \alpha,$$

y este número α puede ser un valor de $\phi(t)$ o de sus derivadas para algún $t = t_0$, el área bajo $\phi(t)$ en algún intervalo o cualquier otra cantidad dependiente $\phi(t)$. Las funciones $\phi(t)$ sobre las cuales se definen las distribuciones son de variable real t y toman valores reales o complejos y pertenecen a un espacio con ciertas propiedades como por ejemplo que tienen derivadas de todos los órdenes, y que se anulan fuera de un intervalo acotado $[a, b]$, o que decrecen rápidamente a cero (más rápido que el crecimiento de cualquier potencia t^n) cuando $t \to \pm\infty$. Además las distribuciones deben verificar las propiedades de **linealidad y continuidad**. Si bien las distribuciones se define sobre este conjunto de funciones que se denominan funciones de test o prueba, se puede extender su definición a un espacio más amplio de funciones.

- **Distribución asociada a una función**. A cada función f continua a trozos se le asocia una distribución T_f de la siguiente manera

$$\phi(t) \xrightarrow{T_f} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\phi(t)\,dt,$$
$$T_f[\phi(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\phi(t)\,dt.$$

  Esta distribución se define sobre aquellas funciones ϕ para las cuales la integral del segundo miembro resulta convergente, como por ejemplo para el espacio de funciones que se anulan fuera de intervelo finito $[a, b]$. De aquí puede verse a las distribuciones como una generalización de las funciones. Muchas de las propiedades de la integración de funciones se pueden extender a las distribuciones.

- **La función delta de Dirac** es una distribución que asigna a la función $\phi(t)$ el número $\phi(0)$,

$$\phi(t) \xrightarrow{\delta} \phi(0),$$
$$\delta[\phi(t)] = \phi(0),$$

donde ϕ es cualquier función continua en $t = 0$. Esta es una distribución que no se asocia a ninguna función. Si bien se suele escribir con el símbolo integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\phi(t)\,dt = \phi(0),$$

no hay que pensarlo como un proceso de integración ordinario, sin embargo como una extensión de las distribuciones asociadas a funciones se utiliza el mismo símbolo. Además se pueden probar ciertas propiedades rigurosamente utilizando la teoría o de manera informal con propiedades similares a la de las integrales. De este modo se pueden realizar cambios de variable, sustituciones e integración por partes para demostar las siguientes propiedades:

Propiedades

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\,\phi(t)\,dt = \phi(t_0)$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\ (\alpha_1\phi_1(t)+\alpha_2\phi_2(t)\,)\,dt = \alpha_1\phi_1(0)+\alpha_2\phi_2(0)$ (linealidad)

3. $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t)\,\phi(t)\,dt = -\phi'(0)$

5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(t)\,\phi(t)\,dt = (-1)^n\phi^{(n)}(0)$

6. $\int_a^b \delta(t)\,\phi(t)\,dt = \begin{cases} \phi(0) & \text{si } 0\in[a,b] \\ 0 & \text{si } 0\notin[a,b] \end{cases}$

7. $\delta(t-t_1)*\delta(t-t_2) = \delta(t-t_1-t_2)$

8. $\frac{dh(t)}{dt} = \delta(t)$

9. Si g es una función continua en $t=0$, entonces $g(t)\delta(t) = g(0)\delta(t)$

Ejercicio 41 .

1. Pruebe las propiedades 1 y 2 utilizando propiedades de integrales (cambio de variables).

2. Muestre que si g es una función continua en $t=0$, entonces $g(t)\delta(t)$ es una función impulsiva equivalente a $g(0)\delta(t)$ [dos distribuciones se consideran iguales cuando tienen el mismo efecto sobre todas las funciones de prueba].

La función delta se puede definir como límite generalizado de funciones ordinarias (corresponde al segundo punto de la definición) como por ejemplo

$$\delta(t) = \lim_{n\to\infty} r_n(t)$$

con $r_n(t) = n(h(t)-h(t-1/n))$.

Las propiedades también se pueden probar utilizando sucesiones de funciones que convergen a $\delta(t)$. Por ejemplo si en la sucesión anterior hacemos $n=\frac{1}{\varepsilon}$, y $t\neq 0$,

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{h(t)-h(t-\varepsilon)}{\varepsilon},$$

por lo tanto este límite se entiende como la derivada de $h(t)$, y su resultado es $\delta(t)$. Del mismo modo se puede decir que la función escalón de Heaviside $h(t)$ es una primitiva de la distribución de Dirac $\delta(t)$.

- **Derivada de una distribució**n. La derivada en el sentido de las distribuciones se define de la siguiente manera:

$$\phi(t) \stackrel{T'}{\to} -T[\phi'(t)],$$
$$T'[\phi(t)] = -T[\phi'(t)].$$

  Esta definición concuerda con la propiedad 3 de la función Delta, donde se muestra que $\delta'(t)$ es otra distribución que asigna a cada $\phi(t)$ el valor $-\phi'(0)$. También concuerda con la derivación de funciones, en el caso de distribuciones asociadas a funciones derivables (integrando por partes): $T'_f[\phi(t)] = T_{f'}[\phi(t)] = -T_f[\phi'(t)]$. Sin embargo en esta definición no es necesario que la función sea derivable, por lo tanto este resultado permite extender la noción de derivada a funciones continuas a tramos y derivables a tramos.

- **Derivada de funciones continuas a tramos**. Si $f(t)$ es continua a tramos y tiene un único punto de discontinuidad en t_0 de tipo salto, entonces siempre se puede escribir a f como la suma de una función continua g más un escalón,

$$f(t) = g(t) + (f(t_0^+) - f(t_0^-))h(t - t_0)$$

  si además g es derivable entonces

$$f'(t) = g'(t) + (f(t_0^+) - f(t_0^-))\delta(t - t_0),$$

  en el sentido de las distribuciones. Si la función tiene más discontinuidades se puede generalizar fácilmente.

Por ejemplo la función $f(t) = t\ h(t)$ es continua pero según el Cálculo Diferencial no es derivable en $t = 0$, sin embargo en el sentido de las distribuciones se puede decir que $f'(t) = h(t)$, entendiendo a f' como una distribución. Del mismo modo se puede decir que la derivada de $(1 + t)h(t)$ es $h(t) + \delta(t)$.

- La sucesión de funciones que converge a $\delta(t)$ no es única también pueden elegirse sucesiones de funciones suaves:

$$\begin{aligned} r_n(t) &= \frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2t^2} \\ r_n(t) &= \frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2x^2} \\ r_n(t) &= \frac{1}{n\pi}\frac{\operatorname{sen}^2(nt)}{t^2} \end{aligned}$$

que tienden a $\delta(t)$ cuando $n \to \infty$.

Del mismo modo $\delta'(t) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^2}\left[h(t) - 2h(t-\varepsilon) + h(t-2\varepsilon)\right]$ (doblete, con $\varepsilon = \frac{1}{n}$, cuando $n \to \infty$, $\varepsilon \to 0$).

De manera informal y sin justificar rigurosamente con la Teoría de Distribuciones, es posible extender las nociones de Transformada de Laplace y Fourier a las funciones generalizadas . Hay que tener en cuenta que como no son funciones ordinarias, continuas a tramos, de orden exponencial, algunas propiedades de Laplace no se verifican.

- **Transformada de Laplace de una distribución**. Si T es una distribución y es posible definir $T[e^{-st}]$ para todo s perteneciente a una cierta región del plano complejo, diremos que la función $\mathcal{L}T(s) = \mathcal{L}\{T\} = T[e^{-st}]$ es la transformada de Laplace de la distribución T.

  De esta definición se deduce que la transformada de Laplace de la distribución asociada a la función $f(t)h(t)$ corresponde a la transformada de Laplace (ordinaria) de $f(t)$, es decir

  $$\mathcal{L}T_{f.h}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}_{(s)} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

  Tener en cuenta que $\mathcal{L}T_{f.h}(s)$ no es lo mismo que $\mathcal{L}T_f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}f(t)dt$, pues esta última integral puede no tener sentido y resultar divergente para todo s. Es decir la transformada de Laplace en el sentido de las distribuciones y la definición de la transformada para funciones ordinarias coinciden cuando la función $f(t)$ se anula cuando $t < 0$.

- **Transformada de Laplace de un impulso unitario**:

  $$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\delta(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}\delta(t)dt = e^0 = 1,$$

  hay que pensarlo en el sentido de las distribuciones y no como una integral ordinaria. Del mismo modo

  $$\mathcal{L}\{\delta'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\delta'(t)dt = -\left.\frac{d}{dt}e^{-st}\right|_{t=0} = se^0 = s,$$

aquí no tendría sentido aplicar la propiedad de Laplace de $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ pues no ha sido demostrada para funciones generalizadas y $\delta(0)$ no está definido. Tampoco se verifica la condición que cumplen las transformadas de funciones de orden exponecial, continuas a tramos, que tienen limite nulo cuando s tiende a ∞ sobre el eje real positivo. Se puede probar que $\mathcal{L}\{T'\} = s\mathcal{L}\{T\}$.

Tabla de transformadas de Laplace (para distribuciones)

$$\begin{array}{ccc}
f(t) & \leftrightarrow & F(s) \\
e^{\alpha t} f(t) & \leftrightarrow & F(s-\alpha) \\
f^{(n)}(t) & \leftrightarrow & s^n F(s) \\
f(t-a) & \leftrightarrow & e^{-as} F(s) \\
 & & \\
\delta(t) & \leftrightarrow & 1 \\
h(t) & \leftrightarrow & \frac{1}{s} \\
t^n h(t) & \leftrightarrow & \frac{n!}{s^{n+1}} \\
e^{\alpha t} h(t) & \leftrightarrow & \frac{1}{s-\alpha} \\
\text{sen} t\ h(t) & \leftrightarrow & \frac{1}{s^2+1} \\
\cos t\ h(t) & \leftrightarrow & \frac{s}{s^2+1}
\end{array}$$

- **Transformada de Fourier de las funciones escalón y impulso unitario**: En general las funciones $1, x, x^2, ...,$ no tienen transformada de Fourier como se definió para funciones ordinarias (no existe $\int_{-\infty}^{+\infty} |f| dx$), sin embargo sí tienen desde el enfoque de distribuciones.

  Algunos ejemplos donde intervienen funciones impulsivas:

$$\Phi(\delta(x))_{(w)} = \frac{1}{2\pi}$$

pues $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, e^{-iwx} dx = \frac{1}{2\pi} \delta[\, e^{-iwx}] = \frac{1}{2\pi}$. Además por la propiedad de dualidad $\Phi^{-1}(\delta(w))_{(x)} = 2\pi \frac{1}{2\pi} = 1$ es decir:

$$\Phi(1)_{(w)} = \delta(w)$$

Usando teoría de variable compleja es posible probar que:

$$\Phi^{-1}(\tfrac{1}{iw})_{(x)} = \text{V.P.C.} \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{iw} e^{iwx} dw = 2\pi h(x) - \pi = \begin{cases} \pi & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\pi & x < 0 \end{cases}$$

Luego $\frac{1}{iw} = \Phi(2\pi h(x) - \pi)_{(w)} = \Phi(2\pi h(x))_{(w)} - \pi\delta(w)$, por lo tanto

$$\Phi(h(x))_{(w)} = \frac{1}{2\pi i w} + \frac{1}{2}\delta(w)$$

En forma similar

$$\begin{aligned} \Phi(\cos(w_0 x))_{(w)} &= \frac{1}{2}\delta(w - w_0) + \frac{1}{2}\delta(w + w_0) \\ \Phi(\text{sen}(w_0 x))_{(w)} &= \frac{1}{2i}\delta(w - w_0) - \frac{1}{2i}\delta(w + w_0) \end{aligned}$$

Ejercicio 42 1. Sea $f(t) = 0$ para $t < 0$, $f(t) = 3 - t$ para $t > 0$. Sea $g(t) = \cos t$ para $-\pi < t < \pi$, $g(t) = 0$ para el resto. Evalúe utilizando función escalón, funciones impulsivas, y propiedades (en el sentido de las distribuciones):

a) $5f'(t) + 2g'(t)$

b) $f''(t)$

c) $g(t)\delta(t-1)$

d) $\int_{-1}^{2} f(t)\delta'(t-1)dt$

e) $\mathcal{L}\{f''(t))\}_{(s)}$

2. Sea $f(t) = e^t h(t)$. Discuta sobre diferencias entre $\mathcal{L}\{f'(t))\}$ según las distribuciones y según la definición de transformada de Laplace para funciones ordinarias

3. Aplique transformada de Laplace y resuelva la siguiente ecuación diferencial: $y'(t) + y(t) = \delta(t)$

4. Aplique transformada de Laplace para encontrar la solución cuando $t > 0$ de la ecuación diferencial: $y'(t) + y(t) = 0$, con $y(0) = 1$.

Transformada Z

- *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería.* James, G.,Pearson Educación
- *Digital signal processing.* Oppenheim, Alan V. (**621.381958. Op5**).
- *Discrete-time signal processing.* Oppenheim, Alan V.; Schafer, Ronald W. (**621.38043. Op5**)
- *Signals & Systems.* Oppenheim, Alan V.; Willsky, Alan S.; Nawab, S. Hamid. (**621.38043. Op5-1**)

La transformada de Lapalce puede ser considerada como una generalización de la transformada de Fourier, ambas se aplican sobre conjuntos de funciones que están definidas sobre $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}$ respectivamente, y cumplen un rol muy importante en la resolución de ecuaciones diferenciales. La transformada Z, en forma similar se aplica sobre otros objetos matemáticos que son sucesiones y permite resolver ecuaciones a diferencia. Trabajaremos con sucesiones reales y complejas cuyo dominio son los números enteros ($\mathbb{Z}$), es decir x_n es una sucesión de $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, o de $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.

Definición 86 *Sean x_n e y_n dos sucesiones y $\alpha \in \mathbb{C}$, en base a la suma y producto de números complejos, se pueden definir las siguientes operaciones con sucesiones :*
Suma: $(x + y)_n = x_n + y_n$
Producto: $(x.y)_n = x_n.y_n$
Multiplicación por constantes: $(\alpha x)_n = \alpha.x_n$
Corrimiento: $x_n = y_{n-n_0}$*, para* $n_0 \in \mathbb{Z}$

Algunos ejemplos de sucesiones comunmente utilizadas

Impulso

$$\delta_n = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

Escalón unitario

$$u_n = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Exponencial

$$x_n = A\alpha^n,$$

A y α pueden ser reales o complejos.

Definición 87 *La transformada Z de una sucesión x_n se define como la siguiente serie de potencias*

$$X(z) = \mathcal{Z}(x_n) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_n \, z^{-n}.$$

El conjunto de valores z para los cuales converge se llama región de convergencia (anillos centrados en el origen)

Ejercicio 43 Muestre utilizando la definición y suma de series geométricas que:

- $\mathcal{Z}(a^n u_n) = \frac{z}{z-a}$, con región de convergencia $|z| > |a|$.
- $\mathcal{Z}(-a^n u_{-n-1}) = \frac{z}{z-a}$, con región de convergencia $|z| < |a|$.

Propiedades de la región de convergencia

- La región de convergencia es un anillo o disco centrado en el origen
- La región de convergencia no puede contener singularidades de $X(z)$.
- Si x_n tiene un número finito de términos no nulos, la región de convergencia es todo el plano excepto $z = 0$ o $z = \infty$.

Algunas propiedades de la Transformada Z

Consideremos los siguientes pares de transformadas Z con su correspondiente regiones de convergencia

$$\begin{array}{cccc} x_n & \longleftrightarrow & X(z) & R_x \\ y_n & \longleftrightarrow & Y(z) & R_y \end{array}$$

1. Linealidad

$$\alpha\, x_n + \beta\, y_n \quad \longleftrightarrow \quad \alpha\, X(z) + \beta\, Y(z)$$

la región de convergencia es al menos $R_x \cap R_y$ (puede ser mayor).

2. Corrimiento

$$x_{n-k} \quad \longleftrightarrow \quad z^{-k} X(z)$$

la región de convergencia es R_x excepto $z = 0$ si $k > 0$,o $z = \infty$ si $k < 0$.

3. Multiplicación por exponenciales

$$\alpha^n\, x_n \quad \longleftrightarrow \quad X(z/\alpha)$$

la región de convergencia es $|\alpha|\, R_x$.

4. Diferenciación

$$n\,x_n \quad \longleftrightarrow \quad -z\frac{dX(z)}{dz}$$

$R_x$excepto posible inclusión o exclusión de $z = 0$.

5. Inversión de sentido

$$x_{-n} \quad \longleftrightarrow \quad X(z^{-1})$$

la región de convergencia es $1/R_x$.

6. Convolución de sucesiones

$$x_n * y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k\, y_{n-k}$$

$$x_n * y_n \quad \longleftrightarrow \quad X(z)\,Y(z)$$

la región de convergencia es por lo menos la intersección $R_x \cap R_y$.

Ejercicio 44 .

1. Muestre la propiedad 2.
2. Utilizando la definición y propiedades encuentre la transformada Z de cada una de las siguientes sucesiones, y su respectiva región de convergencia:

   a) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u_{-n}$

   b) δ_n

   c) δ_{n+1}

   d) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u_n - u_{n-10}$

e) $\begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$

3. Encuentre la sucesión x_n que tenga como transformada Z :

   a) $X(z) = (1+2z)(1+3z^{-1})(1-z^{-1}) \qquad z \neq 0.$

   b) $X(z) = e^z + e^{\frac{1}{z}} \qquad z \neq 0.$

Transformada Z unilátera

Definición 88 *La transformada Z unilátera de una sucesión x_n se define como la siguiente serie de potencias*

$$X(z) = \mathcal{Z}_u(x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n\, z^{-n}$$

la región de convergencia es el exterior de un círculo centrado en el origen, $|z| > r$.

El principal uso de esta transformada es el análisis de ecuaciones a diferencias con coeficientes constantes.

La transformada Z unilátera tiene las mismas propiedades de las transformada Z enunciadas anteriormente a excepción de ciertos cambios en la propiedad 2 y 6 como se detalla a continuación:

2. Corrimiento

Para $k > 0$

$$x_{n-k} \quad \longleftrightarrow \quad z^{-k}X(z) + x_{-1}z^{-k+1} + \cdots + x_{-k+1}\, z^{-1} + x_{-k}$$

$$x_{n+k} \quad \longleftrightarrow \quad z^{k}X(z) - x_0\, z^{k} - \cdots - x_{k-2}\, z^{2} - x_{k-1}\, z$$

la región de convergencia es R_x excepto $z = 0$. Para $k = 1$

$$x_{n-1} \quad \longleftrightarrow \quad z^{-1}X(z) + x_{-1}$$

$$x_{n+1} \quad \longleftrightarrow \quad z\, X(z) - x_0\, z$$

6. Convolución de sucesiones

$$x_n * y_n = \sum_{k=0}^{n} x_k\, y_{n-k}$$

$$x_n * y_n \quad \longleftrightarrow \quad X(z)\, Y(z)$$

la región de convergencia es por lo menos la intersección $R_x \cap R_y$.

Ejercicio 45 Muestre la propiedad 2, para el caso particular de $k = 2$.

Transformada inversa.

Por ser una serie de potencias, en cada región de convergencia, la transformada inversa es única, pues la representación de funciones analíticas en series de potencias es única. La obtención de la transformada inversa, es decir la sucesión que forman los coeficientes de la serie de potencias, puede realizarse por el método de inspección, aplicando propiedades y la tabla de Transformadas Z. Es muy común tener que antitransformar un cociente de polinomios, en este caso es conveniente realizar una descomposición en fracciones, expresando previamente como cociente de polinomios de variable z^{-1}, pues generalmente en las tablas figura $\frac{1}{1-az^{-1}}$. Como $\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$, resulta cómodo también expandir en fracciones $\frac{X(z)}{z}$ y luego multiplicar por z. Otra forma de obtener la suceción es desarrollando la serie de Laurent. Se pueden utilizar las expresiones integrales del teorema de Laurent y resolverlas por residuos.

Ejemplo: Sea $X(z) = \frac{z}{(z-2)(z-1)}$ en la región $|z| > 2$.

Si expandimos en fracciones $\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$, entonces

$$X(z) = \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1}$$

de aquí, por tabla, es fácil ver que $x_n = (2^n - 1)u_n$. También se puede desarrollar en serie de Laurent (como suma de dos series gemétricas de raznes $\frac{2}{z}$ y $\frac{1}{z}$)

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1)\, z^{-n}\,, \quad \text{cuando } |z| > 2,$$

de donde se ve claramente que $x_n = (2^n - 1)u_n$.

De otra manera $X(z) = \frac{z}{(z-2)(z-1)} = \frac{z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1-z^{-1})}$

Si hacemos la sustitución $s = z^{-1}$, y desarrollamos en fracciones:

$$\frac{s}{(1-2s)(1-s)} = \frac{\frac{1}{2}s}{(s-\frac{1}{2})(s-1)} = -\frac{\frac{1}{2}}{s-\frac{1}{2}} + \frac{1}{s-1}$$

ahora volviendo a z^{-1}

$$\begin{aligned} X(z) &= -\frac{\frac{1}{2}}{z^{-1}-\frac{1}{2}} + \frac{1}{z^{-1}-1} \\ &= \frac{1}{1-2z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}} \end{aligned}$$

de donde nuevamente es facil ver que es la transformada Z de $x_n = (2^n - 1)u_n$.

Ejercicio 46 .

1. Use desarrollo en series de potencias (Laurent) o descomposición en fracciones para anti-transformar:

   a) $X(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{2}$.

   b) $X(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z| < \frac{1}{2}$.

   c) $X(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-2}} \quad |z| > \frac{1}{2}$.

2. Resolver la siguiente ecuación a diferencia. Es decir se debe encontrar la sucesión y_n para $n \geq 0$, sabiendo que $y_{-1} = 1$ y que verifica la siguiente ecuación

3.

$$y_n - \frac{1}{2}y_{n-1} = 1 \quad \text{para } n \geq 0.$$

4. Dada la siguiente ecuación a diferencia: $y_n + 3y_{n-1} = \frac{1}{2^n}u_n$

   a) Encuentre todas las posibles sucesiones y_n que la verifican para todo n entero.

   b) Encuentre una solución particular y_n para $n \geq 0$, sabiendo que $y_{-1} = 1$.

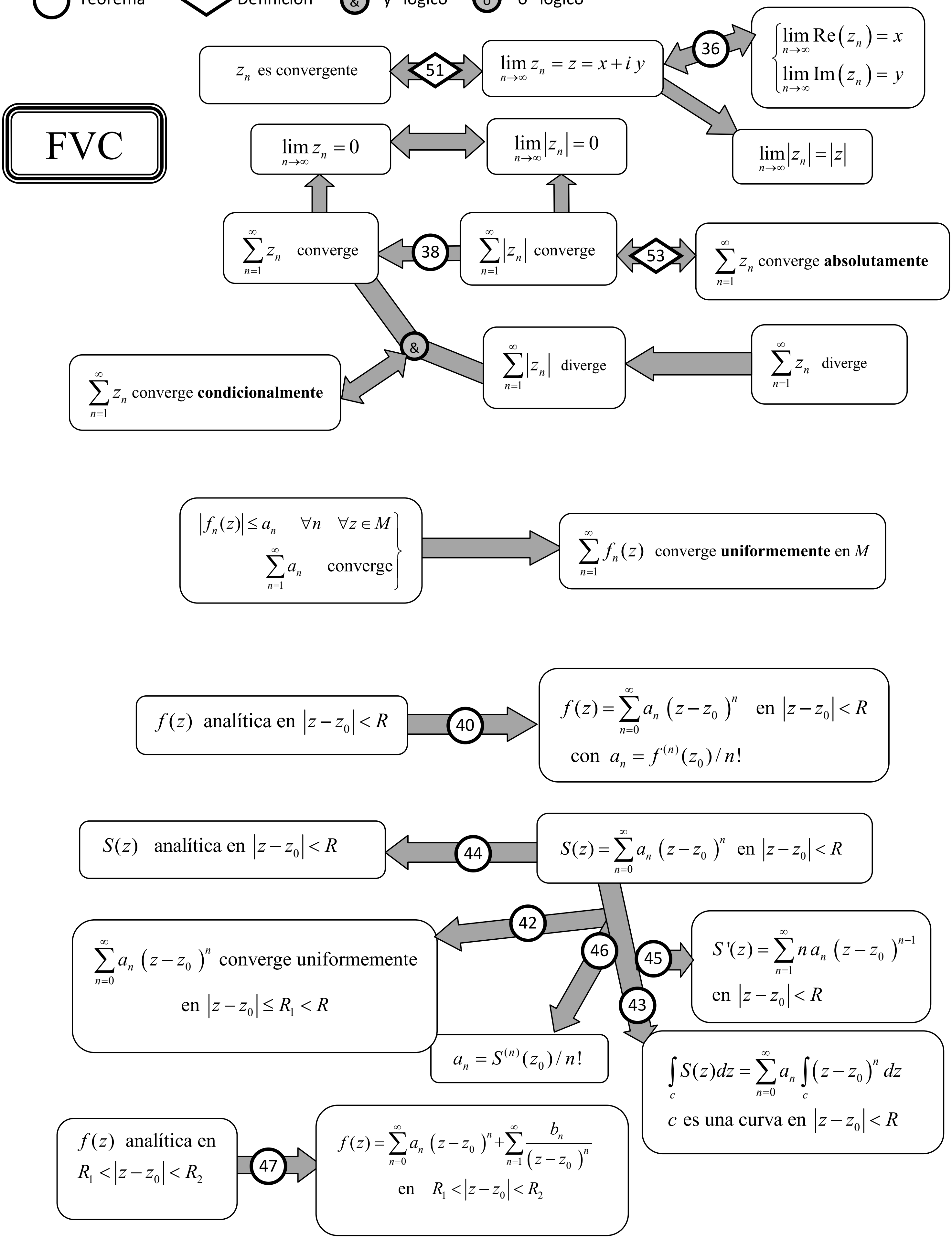
Propiedades de la Transformada–Z

Propiedad	Dominio–n	Dominio–z	ROC (región de convergencia)
Notación	$x[n]$	$X(z)$	ROC: $r_2 < \|z\| < r_1$
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	ROC_1
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	ROC_2
Linealidad	$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]$	$a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$	Por lo menos $ROC_1 \cap ROC_2$
Desplazamiento temporal	$x[n-k]$	$z^{-k} X(z)$	La misma que la de $X(z)$, excepto $z = 0$, si $k > 0$, y $z = \infty$ si $k < 0$.
Escalado en el dominio z	$a^n x[n]$	$X(a^{-1}z)$	$\|a\|r_2 < \|z\| < \|a\|r_1$
Inversión de tiempo	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	1/ROC
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	ROC
Parte Real	$\mathrm{Re}\{x[n]\}$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$	Incluye ROC
Parte Imaginaria	$\mathrm{Im}\{x[n]\}$	$\frac{1}{2}[X(z) - X^*(z^*)]$	Incluye ROC
Diferenciación en el dominio z	$n\,x[n]$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$	$r_2 < \|z\| < r_1$
Convolución	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)\,X_2(z)$	Contiene $ROC_1 \cap ROC_2$.
Correlación	$r_{x_1x_2}[n] = x_1[n] * x_2[-n]$	$R_{x_1x_2}(z) = X_1(z)X_2(z^{-1})$	Por lo menos la intersección de las ROC de $X_1(z)$ y $X_2(z^{-1})$.
Teorema del valor inicial	Si $x[n]$ es causal	$x[0] = \lim\limits_{z\to\infty} X(z)$	
Multiplicación	$x_1[n]\,x_2[n]$	$\dfrac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2(\frac{z}{v})v^{-1}dv$	Por lo menos $r_{1\,mín}\,r_{2\,mín} < \|z\| < r_{1\,máx}\,r_{2\,max}$
Relación de Parseval	$\sum\limits^{\infty} x_1[n]x_2^*[n] = \dfrac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2^*(\frac{1}{v^*})v^{-1}dv$		

Algunos pares transformados de uso frecuente.

Sucesión	Transformada	Región de convergencia
$\delta[n]$	1	Todo z
$u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	Todo z excepto 0 (si $m > 0$) o ∞ (si $m < 0$)
$a^n\, u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n\, u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$n\, a^n\, u[n]$	$\dfrac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-n\, a^n\, u[-n-1]$	$\dfrac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$[\cos \omega_0 n]\, u[n]$	$\dfrac{1-\cos\omega_0\, z^{-1}}{1-2\cos\omega_0\, z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$[\operatorname{sen} \omega_0 n]\, u[n]$	$\dfrac{\operatorname{sen}\omega_0\, z^{-1}}{1-2\cos\omega_0\, z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$[r^n \cos \omega_0 n]\, u[n]$	$\dfrac{1-r\cos\omega_0\, z^{-1}}{1-2r\cos\omega_0\, z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
$[r^n \operatorname{sen} \omega_0 n]\, u[n]$	$\dfrac{r\operatorname{sen}\omega_0\, z^{-1}}{1-2r\cos\omega_0\, z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\begin{cases} a^n, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$	$\dfrac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 0$

Teorema Definición & "y" lógico ó "o" lógico



◯ Teorema ◇ Definición & "y" lógico ó "o" lógico

z_0 es un **cero** de orden m de $f(z)$

60

$0 = f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0)$

$f^{(m)}(z_0) \neq 0$

$f(z) = (z-z_0)^m g(z)$ g analítica en z_0 $g(z_0) \neq 0$

z_0 es un punto singular aislado de $f(z)$

57

$f(z)$ no es analítica en z_0 pero es analítica en $0 < |z - z_0| < R_2$

58

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z - z_0\right)^n + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\left(z - z_0\right)^n}}_{\text{Parte Principal}} \quad \text{en} \quad 0 < |z - z_0| < R_2$$

$\mathrm{b}_1 = \operatorname*{Res}_{z_0}(f(z))$ es el residuo de en z_0

En todo entorno de z_0, f alcanza (infinitas veces) todo valor finito, con una única posible excepción.

49

59

ó

z_0 es punto singular **esencial** de $f(z) \Leftrightarrow$ infinitos $b_n \neq 0 \quad \Leftrightarrow$ no existe $\lim_{z \to z_0} f(z)$

z_0 es punto singular **evitable** de $f(z) \Leftrightarrow b_n = 0 \quad \forall n \quad \Leftrightarrow$ existe $\lim_{z \to z_0} f(z)$

z_0 es punto singular **polo** de $f(z) \Leftrightarrow b_m \neq 0,\ b_n = 0, \quad \forall n > m \quad \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$

$f(z) = \dfrac{\Phi(z)}{(z - z_0)^m}$, Φ analítica en z_0

$\Phi(z_0) \neq 0$

$$b_1 = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right]$$

f analítica sobre y dentro de una curva cerrada simple c, orientada positiva, excepto en un número finito de puntos z_k interiores a c

48

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z_k}\left(f(z)\right)$$

Una idea de Gonzalo Acosta & Nicolás García

Función de variable Compleja
$f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$