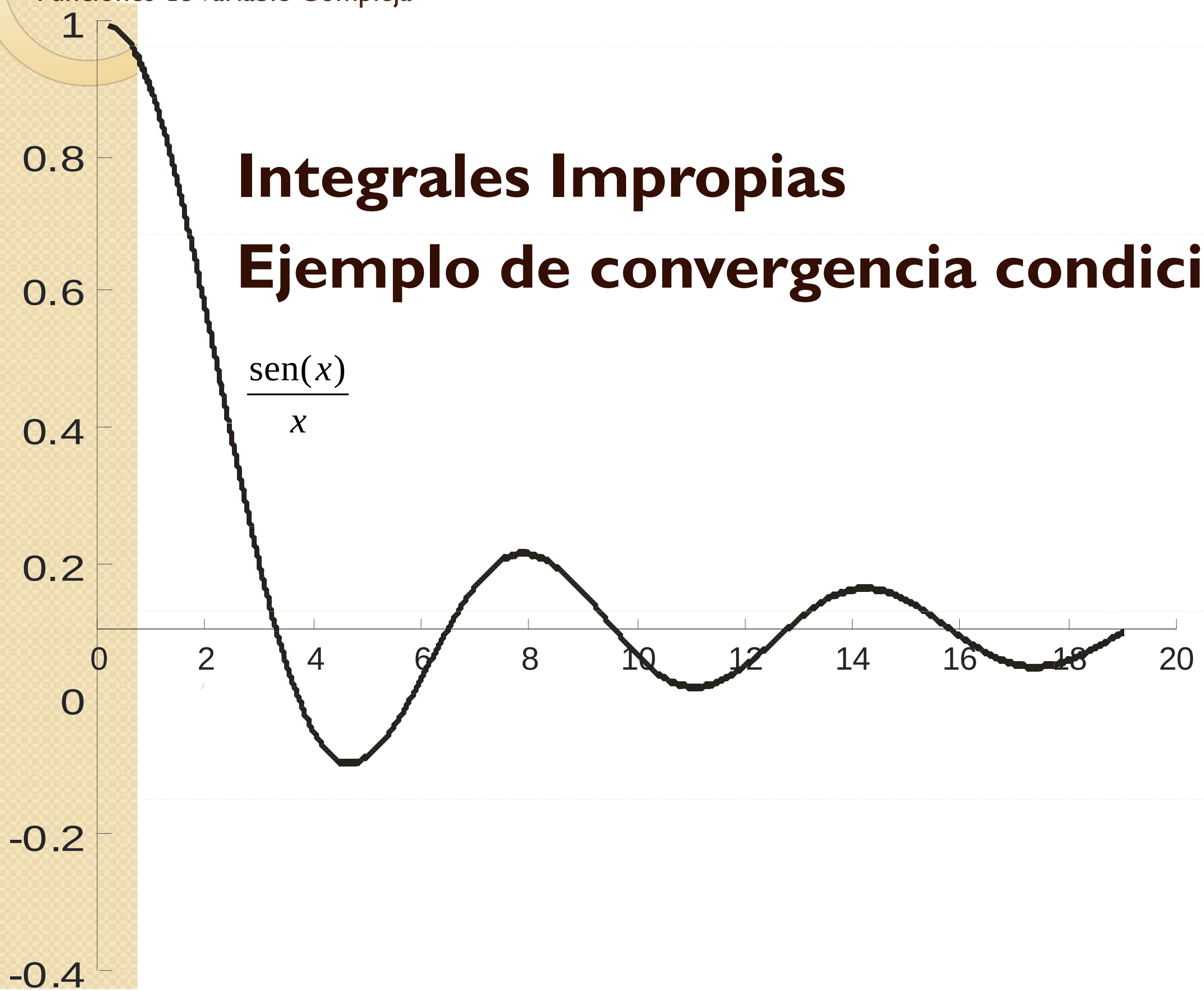
F V C

Funciones de Variable Compleja

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x} dx$$

Integrales Impropias

Ejemplo de convergencia condicional



Convergencia Condicional de:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx$$

Hay integrales impropias **convergentes** que **no** son **absolutamente convergentes**, por eso se dice que son **condicionalmente convergentes,** ver Def. 15 de la guía.

El siguiente es un ejemplo de este tipo de convergencia.

Análisis de convergencia.

En principio, al no estar definido el integrando en $x = 0$, se divide en dos partes el intervalo de integración:

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = \int_0^{1} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx + \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx$$

Sin embargo el término $\int_0^{1} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx$ no es una integral impropia,

pues existe el $\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$.

La convergencia, por lo tanto dependerá del segundo término.

Convergencia

- Aplicando integración por partes: [ver en la pag. 7 de la guía, el punto 3 de las operaciones válidas con int. impropias]

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = \lim_{R \to \infty} \left(-\frac{\cos(x)}{x} \Bigg|_1^R - \int_1^R \frac{\cos(x)}{x^2} dx \right)$$

$$= \cos(1) - \int_1^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx$$

esta última igualdad se justifica por la existencia de ambos límites, ya que la

integral $\int_1^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx$ es absolutamente convergente,

por comparación $\int_1^{\infty} \frac{|\cos(x)|}{x^2} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ y $\lim_{R \to \infty} \frac{\cos(R)}{R} = 0$.

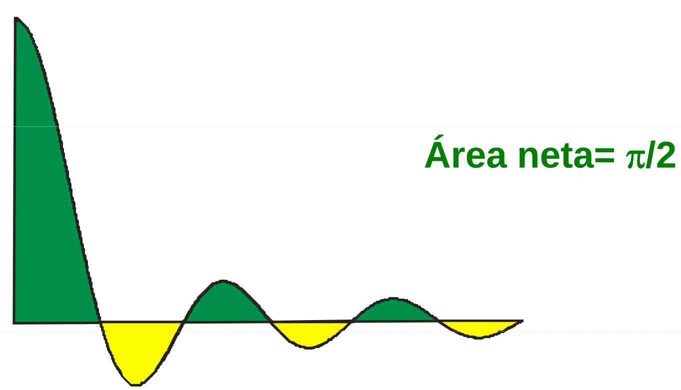
FVC

Funciones de Variable Compleja

Convergencia

Por lo tanto con esto se prueba la **convergencia** de $\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx$

Aunque no se pueda resolver directamente por definición, con otros métodos, además, se puede probar que converge al valor $\frac{\pi}{2}$.



Convergencia absoluta

Se probará que con *N* natural, el $\lim_{N\to\infty}\int_0^{N\pi}\frac{|\mathrm{sen}(x)|}{x}dx$ diverge,

y esto implica que también diverge para *R* real el $\lim_{R\to\infty}\int_0^{R}\frac{|\mathrm{sen}(x)|}{x}dx$.

F V C

Funciones de Variable Compleja

Convergencia absoluta

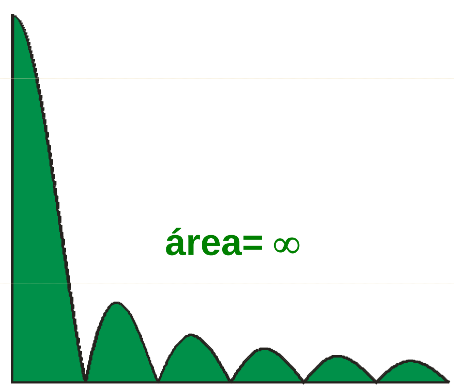
Entonces, integrando por tramos y sumando se tiene

$$\int_0^{N\pi} \frac{|\mathrm{sen}(x)|}{x} dx = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\mathrm{sen}(x)|}{x} dx \geq \sum_{n=0}^{N-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\mathrm{sen}(x)|}{(n+1)\pi} dx = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2}{(n+1)\pi}$$

pues, $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{(n+1)\pi}$ y $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\mathrm{sen}(x)| dx = 2$,

pero la última suma diverge cuando $N \to \infty$

Por lo tanto $\int_0^{\infty} \frac{|\mathrm{sen}(x)|}{x} dx$ **diverge**.



Como,

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx$$ converge, y

$$\int_0^{\infty} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}dx$$ diverge,

entonces , $$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx$$

converge condicionalmente.