FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

Segundo Parcial (Realice cada ejercicio en hojas separadas) **13/6/2013**

Nombre: .... mail: .... Nota: ....

LU: .... Carrera: .... Nro total de hojas: ....

1. (a) Calcule la transformada de Laplace de las siguientes funciones

(i) $f(\mathrm{t}) = e^{-t} g(\mathrm{t})$, donde g(t) es periódica de período 2 y para $t \in (-1,1]$ se define como: $g(\mathrm{t}) = \begin{cases} 0, & -1 < t < 0 \\ 1, & 0 \le \mathrm{t} \le 1. \end{cases}$

(ii) $r(t) = \dfrac{e^{2t} - e^{-3t}}{t}$.

(b) Calcule, si es posible, la transformada inversa de Laplace de

(i) $F(\mathrm{s}) = \dfrac{se^{-s}}{(\mathrm{s}+1)(\mathrm{s}+4)^2}$, **(ii)** $G(\mathrm{s}) = \dfrac{\mathrm{s}^3}{(\mathrm{s}+1)(\mathrm{s}+4)^2}$.

---

2. Dada la función periódica $g(t)$ del ejercicio **1.(a)(i)**:

(a) Halle su desarrollo en serie de Fourier. Grafique la función a la cual converge el desarrollo obtenido. Utilizando sus resultados, calcule la suma de la serie $-\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \ldots = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$.

(b) A partir del desarrollo de $g(t)$ obtenido en **2.(a)**, obtenga los desarrollos de:

(i) $p(t) = g(t) - 1/2$, **(ii)** $v(t) = g\left(t + \tfrac{1}{2}\right)$, **(iii)** $u(t) = g(2t)$.

---

3. (a) Halle y clasifique todos los puntos singulares de $f(\mathrm{z}) = \dfrac{e^z - 1}{\mathrm{senh(z)}}$. Calcule el residuo en cada caso.

(b) Calcule $\displaystyle\int_{|\mathrm{z}|=1} z^5 \,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{z^2}\right) dz$.

(c) Halle la imagen de la recta $\mathrm{Im}(z) = 1 - \mathrm{Re}(z)$ bajo la transformación $w = i + 1/z$.

---

4. (a) Sea f una función real, continua, de variable real, tal que $|f(t)| \le 10e^{2t}\ \forall t \ge 0$, y sea $F(s) = \mathscr{L}(f(t))_{(s)} = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$.

i) ¿$F(s)$ es analítica en $\mathrm{Re}(s) > 2$?

ii) ¿Existe alguna función distinta de f que tenga la misma transformada de Laplace que f?

iii) Muestre utilizando la definición que: $4F(4s) = \mathscr{L}\big(f(t/4)\big)_{(s)}$, ¿para qué valores complejos de s se verifica? ¿$F(4s)$ puede tener un punto singular tipo polo en $s_0 = 1$?

iv) Muestre que si $F(s)$ tiene un cero doble en, $s_0 = 4$ entonces $\dfrac{F'(s)}{F(s)}$ tiene un polo en $s_0 = 4$ ¿Cuál es su residuo?

(b) Considere las funciones $p(t)$, $v(t)$ y $u(t)$ del ejercicio **2.(b)**: ¿presentan alguna simetría (par, impar, media onda)?¿sus desarrollos quedan series sólo de senos, cosenos o con armónicos impares?¿Son convengentes para todo t real? ¿convergen uniformemente? ¿Sus coeficientes decrecen como $1/n^2$?