Recuperatorio General de Funciones de Variable Compleja 03/12/2018

Nombre: ________________________________ LU: ____________ NOTA: __________

*** Ejercicios muy desprolijos, o que no cuenten con su debida justificación, no serán evaluados.**

---

1. (a) Halle la región de analiticidad de $f(z) = \ln\left|\frac{z+i}{z-i}\right| + i\,\mathrm{Arg}\left(\frac{z+i}{z-i}\right)$, $-\pi < \mathrm{Arg}(z) \leq \pi$. Donde sea posible calcule su derivada.

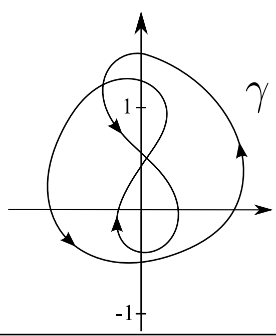
(b) Dada $u(x, y) = \mathrm{Re}\left\{\dfrac{z+i}{z-i}\right\}$, indique si se trata de una función armónica en $|z-1| < 1$, y en caso afirmativo halle una armónica conjugada.

(c) Halle y represente gráficamente los $z \in \mathbb{C}$ que verifiquen:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z^2) + 2(\mathrm{Im}(z))^2 &= 1 \\ z^2 - \bar{z}^2 &= z - \bar{z} \end{cases}$$

---

2. Calcule las siguientes integrales:



(a) $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{1}{(z-i)^2}\mathrm{Log}\left(\frac{z+i}{z-i}\right)dz$, donde γ_1 es el segmento que une los puntos -1 y 1, $0 \leq \mathrm{Arg}\, z < 2\pi$, $\mathrm{Log}(1) = 2\pi i$. (Observe que $\frac{d}{dw}\left(w(\mathrm{Log}(w) - 1)\right) = \mathrm{Log}(w)$.)

(b) $\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{e^{\pi z}}{z^8(z^2+1)}\,dz$, donde γ_2 es la curva de la figura.

---

3. (a) Halle la región de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{n-1}$. Estudie el comportamiento de la serie en la frontera de la región de convergencia.

(b) Halle un desarrollo de Laurent que represente a $h(z) = \dfrac{1}{z(z+2)}$ en el anillo $1 < |z-1| < 3$. Con este desarrollo, ¿puede clasificar algún punto singular de h? En caso afirmativo, clasifíquelo.

---

4. Encuentre una función real que resuelva la ecuación: $y''(t) + y(t) = 2\int_0^t e^{-u}\cosh(t-u)du$, con condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$.

---

5. (a) Halle la serie de Fourier de la función de período 4 dada por: $f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x \leq 0, \\ -1, & 0 < x < 2. \end{cases}$

(b) Si $g(x) = \begin{cases} 1+x, & -2 \leq x \leq 0, \\ 1-x, & 0 < x < 2. \end{cases}$ de período 4, halle la serie de Fourier de g <u>utilizando el resultado de (a)</u>.

---

6. Halle la imagen del conjunto $\{z \in \mathbb{C} : -\mathrm{Re}(z) - 1 < \mathrm{Im}(z) < -\mathrm{Re}(z)\}$ bajo la transformación $w = 1/(z+i)$.

Recuperatorio del primer y segundo parcial de Funciones de Variable Compleja 28/06/2018

Nombre: ______________________________ LU: ____________ NOTA: ________

*** Ejercicios muy desprolijos, o que no cuenten con su debida justificación, no serán evaluados.**

---

1. (a) Clasifique la siguiente integral impropia en: Condicionalmente Convergente, Absolutamente Convergente o Divergente: $\displaystyle\int_0^3 \frac{x+1}{(3-x)^4}dx$

(b) Halle y represente gráficamente los $z \in \mathbb{C}$ que verifiquen:

(i) $|\text{Arg}(z^2)| < \pi/2$, $-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$.

(ii) $\begin{cases} \bar{z} + z & > & 0 \\ z^4 + 1 & = & 0 \end{cases}$

---

2. (a) Dada $f(z) = x + iv(x,y)$, donde: $v(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(y-1)^3}{x^2 + (y-1)^2}, & (x,y) \neq (0,1), \\ 0, & (x,y) = (0,1). \end{cases}$

(i) Analice la continuidad y derivabilidad en el punto $z = i$.

(ii) Analice la continuidad y derivabilidad para $z \neq i$.

(b) Halle la región de analiticidad de $g(z) = \text{Log}\left(\frac{z+2}{z-1}\right)$, $-\pi < \text{Arg}z \leq \pi$. Donde sea posible calcule su derivada.

---

3. Calcule las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_{|z-3|=1} \frac{\text{Log}\left(\frac{z+2}{z-1}\right)}{z-3}dz$, $-\pi < \text{Arg}z \leq \pi$, $\text{Log}(1) = 0$.

(b) $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{1}{(z^2+4)^2 z}dz$, donde $\gamma_1 : |z - i| = 3/2$.

(c) $\displaystyle\int_{\gamma_2} \cos z \, e^{\text{sen} z} \, dz$, $\quad \gamma_2 : z(t) = \frac{\pi}{2}e^{it}, \; 0 \leq t \leq \pi$.

---

4. (a) Halle el desarrollo de Taylor de $f(z) = \text{sen}z$ centrado en $z_0 = \pi/2$ y determine el radio de convergencia.

(b) Dada $g(z) = \dfrac{1}{z(z+2)^2}$, indique cuántos desarrollos de Laurent en potencias de $z+2$ existen, y halle el que resulte convergente en $z = -1$. Utilizando el desarrollo hallado, clasifique uno de los puntos singulares de g y halle el residuo correspondiente.

Recuperatorio del primer y tercer parcial de Funciones de Variable Compleja 28/06/2018

Nombre: ______________________________ LU: ______________ NOTA: __________

*** Ejercicios muy desprolijos, o que no cuenten con su debida justificación, no serán evaluados.**

---

1. (a) Clasifique la siguiente integral impropia en: Condicionalmente Convergente, Absolutamente Convergente o Divergente: $\displaystyle\int_0^3 \frac{x+1}{(3-x)^4}dx$

(b) Halle y represente gráficamente los $z \in \mathbb{C}$ que verifiquen:

(i) $|\mathrm{Arg}(z^2)| < \pi/2$, $-\pi < \mathrm{Arg}(z) \leq \pi$.

(ii) $\begin{cases} \bar{z} + z & > & 0 \\ z^4 + 1 & = & 0 \end{cases}$

---

2. (a) Dada $f(z) = x + iv(x, y)$, donde: $v(x, y) = \begin{cases} \dfrac{(y-1)^3}{x^2 + (y-1)^2}, & (x, y) \neq (0, 1), \\ 0, & (x, y) = (0, 1). \end{cases}$

(i) Analice la continuidad y derivabilidad en el punto $z = i$.

(ii) Analice la continuidad y derivabilidad para $z \neq i$.

(b) Halle la región de analiticidad de $g(z) = \mathrm{Log}\left(\frac{z+2}{z-1}\right)$, $-\pi < \mathrm{Arg}z \leq \pi$. Donde sea posible calcule su derivada.

---

3. (a) Halle la transformada de Laplace de $f(t) = \dfrac{e^t - e^{-2t}}{t}$, indicando los valores de $s \in \mathbb{C}$ para los cuales la misma está definida.

(b) Halle la transformada inversa de Laplace de $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s(s^2+4)^2}$. Muestre que $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$ es una función real.

---

4. Sea $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < -1/2 \text{ ó } 1/2 < x < 1, \\ -1, & -1/2 \leq x \leq 1/2, \end{cases}$ de período 2. Halle la serie de Fourier de f. Utilizando su resultado, halle las series de Fourier de: i) $g(x) = f(2x) + \dfrac{1}{2}$ ii) $h(x) = f(x-1)$.

---

5. (a) Halle una transformación bilineal que mapee los puntos $z_1 = -1$, $z_2 = 0$ y $z_3 = \infty$ en los puntos $w_1 = \infty$, $w_2 = 0$ y $w_3 = 1 - i$, respectivamente. ¿Cuál es la imagen de la región $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}z > 0\}$ bajo esta transformación?

(b) Halle (en forma analítica) la imagen de la circunferencia $|z+1| = 1$ bajo la transformación $w = f(z) = \dfrac{i}{z+2}$.
