FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

Primer Parcial (Realice cada ejercicio en hojas separadas) **6/5/2013**

Nombre: ....mail: .... Nota: ....

LU: .... Carrera:.. Nro total de hojas: ....

1. Sea $f(z)=\begin{cases} \dfrac{x^3+xy^2+\mathrm{i}\,[x^2y+y^3]}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0), \\ i, & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$

(a) Analice si $f(z)$ es continua en $z=0$. ¿Existe $f'(0)$?

(b) Analice si $f(z)$ es continua, derivable y analítica, para $z\neq 0$. Donde sea posible, calcule $f'(z)$.

(c) Halle la región, si existe, donde $u(x,y)=\dfrac{x^3+xy^2}{x^2+y^2}$, $x^2+y^2\neq 0$, es armónica. Halle la armónica conjugada $v(x,y)$ que verifica $v(1,0)=2$.

(d) Indique el dominio donde $g(z)=\dfrac{\sqrt{z-3}}{\operatorname{senh}(z)}$ es analítica, donde $\sqrt{z}=|z|^{\frac{1}{2}}\,e^{\mathrm{i}\operatorname{Arg}(z)/2}$, $0\leq \operatorname{Arg}(z)<2\pi$.

---

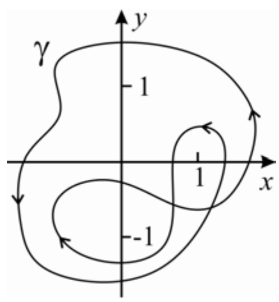
2. Dadas $f(z)=\dfrac{1}{z(z-i)}$ y $g(z)=\dfrac{1}{z}$,

(a) Halle un desarrollo en serie de Taylor para $g(z)$, centrado en $z_0=i$. Indique la región de convergencia.

(b) ¿Cuántos desarrollos en potencias de $(z-\mathrm{i})$ admite $f(z)$? Obtenga uno convergente para $1<|z-\mathrm{i}|$.

---

3. **(a)** Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)(z+1)^2}$, donde γ es la curva que se muestra en la figura:



(b) Muestre que $\left|\displaystyle\int_\gamma \frac{\cosh(z)}{z}dz\right|\leq 1$, siendo γ el segmento que une los puntos i y 2i.

(c) Evalúe $\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{Log}(z)}{z}dz$, donde $\operatorname{Log}(1)=2\pi\mathrm{i}$, $0\leq \operatorname{Arg}(z)<2\pi$,

$\gamma:\ z(t)=e^{it},\ \ 2\pi\leq t\leq 3\pi.$

---

4. Responda y justifique usando definiciones, teoremas, y propiedades:

(a) ¿Cuáles son los puntos singulares de las funciones $f(z)$ y $g(z)$ del ejercicio **2**? Con los resultados de **2.(a)** y **2.(b),** ¿puede clasificarlos? En caso afirmativo, clasifique el/los que considere posibles.

(b) Muestre que el desarrollo de Taylor encontrado en **2.(a)** converge uniformemente en el disco cerrado $|z-i|\leq\dfrac{1}{2}$. ¿La función suma de ese desarrollo es continua allí?

(c) Sea f una función de variable compleja continua en un dominio simplemente conexo D.

i) Si $f(z)$ verifica las ecuaciones de Cauchy Riemann en un punto de D, ¿es f analítica en ese punto?

ii) Si $\int_C f(z)dz=0$ para todo contorno cerrado C contenido en D, ¿f es analítica y tiene primitiva en D?

iii) Si $f(z)$ es derivable en D, ¿$\int_C f(z)dz=0$ para todo contorno cerrado C contenido en D?