# Teoremas: Condiciones Necesarias, Condiciones Suficientes y Condiciones Necesarias y Suficientes

## Lógica Matemática

Una prioridad que tiene la enseñanza de la matemática es la de contribuir a la formación y desarrollo del pensamiento lógico en los estudiantes. Poder enfrentarse tanto a la demostración de un teorema como a su aplicación, encontrando la forma correcta y lógica a seguir para lograr el objetivo. Además, el pensamiento lógico ayuda al alumno a relacionar estos conocimientos con los de otras áreas y obtener la solución a otros tipos de problemas que enfrenten en la vida cotidiana.
Las demostraciones son una forma de comunicación cuyo objetivo es convencer de la veracidad de las afirmaciones que se hacen. El lenguaje de esta comunicación es la "lógica matemática". Para construir estas afirmaciones se utilizan: proposiciones, operadores lógicos y cuantificadores.

## Lógica Proposicional

*En la lógica matemática, una proposición es una sentencia que puede ser verdadera o falsa, como por ejemplo "2 y 2 son 5" o "Yo soy el hombre más guapo, simpático y modesto del mundo" (la primera es evidentemente falsa, y la segunda verdadera).*

La lógica matemática es la disciplina que trata de métodos de razonamiento. En un nivel elemental, la lógica proporciona reglas y técnicas para determinar si es o no válido un argumento dado. El razonamiento lógico se emplea en matemática para demostrar teoremas; en ciencias de la computación para verificar si son o no correctos los programas; en las ciencias física y naturales, para sacar conclusiones de experimentos; y en las ciencias sociales y en la vida cotidiana, para resolver una multitud de problemas. Ciertamente se usa en forma constante el razonamiento lógico para realizar cualquier actividad.

### *Proposición*

Una proposición es todo enunciado al que se le puede asignar uno y sólo uno de los valores de verdad, que son:

VERDADERO (V) o FALSO (F)

Por lo general, las proposiciones se representan con las letras minúsculas del alfabeto, desde la letra p en adelante, es decir, p, q, r, s, t, ... etc.

*Ejemplos*

a) La expresión 15 + 5 = 21 es una proposición que se puede indicar brevemente de la forma

$$p: 15 + 5 = 21$$

cuyo valor de verdad es falso, lo que se indica mediante V(p) = F

b) Sea la proposición

q: Santa Fe es una provincia argentina V(q) = V

*Funciones Proposicionales*
Si en la proposición "cinco es mayor que tres" (en símbolos es $5 > 3$) reemplazamos al número 5 por la letra x, se obtiene la expresión "x es mayor que tres" ($x > 3$), y si convenimos que x no represente necesariamente al número 5, sino a un número real cualquiera, entonces el enunciado $x > 3$ se denomina función proposicional y se anota p(x) o $p_{(x)}$.
Una función proposicional en una variable o indeterminada x es un enunciado en el que aparece x como sujeto y que se convierte en una proposición cuando se le asigna un valor específico a la variable.
*Ejemplo*: Sea la función proposicional p(x): $2x-5 = 3$. Si se remplaza x por 4 y x por 2, se obtienen, respectivamente, los siguientes valores de verdad: p(4) = V y p(2) = F

### *Operaciones Lógicas*
A partir de proposiciones simples es posible generar otras, las compuestas. Es decir, se puede operar con proposiciones utilizando para ello ciertos símbolos llamados conectivos lógicos.

| **Operación** | **Símbolo** | **Significado** |
|---|---|---|
| Negación | ~ | "no ….." o "no es cierto que … |
| Conjunción o producto lógico | $\wedge$ | "…. y …." |
| Disyunción o suma lógica | $\vee$ | "… o …" (en sentido incluyente) |
| Implicación | $\Rightarrow$ | "… implica …", o "si… entonces …" |
| Doble implicación | $\Leftrightarrow$ | "… si y sólo si …" |
| Diferencia simétrica o Disyunción excluyente | $\underline{\vee}$ | " … o …" (en sentido excluyente) |

# Implicación o Condicional

La *implicación* de las proposiciones p y q es la proposición $p \Rightarrow q$

La proposición p se llama **antecedente**, y la proposición q se llama **consecuente** de la implicación o condicional. Cuando la implicación es una proposición Verdadera se asegura que si el antecedente es cierto, también lo es el consecuente (éste no puede ser falso). Si el antecedente no es cierto, el consecuente puede ser verdadero o falso.
Por ejemplo, si tenemos las proposiciones: p: José es mendocino y q: José es argentino

La implicación $p \Rightarrow q$: *Si José es mendocino, José es Argentino*; es una proposición verdadera
*Expresiones sinónimas*

$p \Rightarrow q$
Si p entonces q
Si p, q
Todo p verifica q
p implica q
p sólo si q
q si p
q cuando p
q siempre que p

Además, se dice que

p es *condición suficiente* para q y q es *condición necesaria* para p

*Ejemplo*: En el conjunto de funciones de una variable, la siguiente implicación es verdadera:

"Si la función f es derivable, entonces f es continua"

Se tienen las proposiciones p: f es una función derivable y q: f es una función continua

La proposición p es condición suficiente para q. Es decir, que una función sea derivable es suficiente para asegurar que es continua. Por otra parte, f es derivable sólo si es continua; es decir que f sea continua es necesario para que sea derivable.

*Implicaciones asociadas*
Dada la implicación p $\Rightarrow$ q, que llamaremos directa, existen implicaciones asociadas:

- la **implicación recíproca** q $\Rightarrow$ p.
- la **implicación contrarrecíproca** ~q $\Rightarrow$ ~p.

Si la implicación directa es verdadera, su recíproca no siempre es cierta. En cambio los valores de verdad de las implicaciones p $\Rightarrow$ q y ~q $\Rightarrow$ ~p son iguales. Se dice que las implicaciones directa y contrarrecíproca son equivalentes, es decir, tienen el mismo valor de verdad. La contrarrecíproca resulta útil cuando no se cumple una condición necesaria, V(~q)=V, pues implica V(~p)=V ó V(p)=F; sin embargo cuando no se cumple una condición suficiente, V(p)=F, nada se puede inferir sobre q.

# Doble Implicación o Bicondicional

Doble implicación de las proposiciones p y q es la proposición p $\Leftrightarrow$ q (se lee "p si y sólo si q")

La doble implicación o bicondicional sólo es verdadera si ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad (p $\Rightarrow$ q) $\wedge$ (q $\Rightarrow$ p), es decir la doble implicación puede definirse como la conjunción de una implicación y su recíproca.

*Ejemplo* Sean a y b dos números reales, el enunciado

$$a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$$

es una doble implicación cierta para números no negativos. Está compuesta por las proposiciones:

p: $a = b$ y q: $a^2 = b^2$

Para números reales en general, V(p $\Rightarrow$ q) =V y V(q $\Rightarrow$ p) = F, entonces V(p $\Leftrightarrow$ q) = F.

OBSERVACIÓN
La doble implicación p $\Leftrightarrow$ q, es una equivalencia entre proposiciones o condiciones.
Se tiene de la primera implicación (p $\Rightarrow$ q), que p es condición suficiente para q y, teniendo en cuenta la segunda implicación (q $\Rightarrow$ p), ocurre que p es condición necesaria para q. Entonces p es condición necesaria y suficiente para q y, análogamente, q es también condición necesaria y suficiente para p.
Las definiciones matemáticas se pueden expresar con dobles implicaciones. Por ejemplo, la definición de continuidad de una función en un punto:

$$f \text{ es continua en } x_0 \Leftrightarrow f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

*Equivalencias múltiples*: (p $\Leftrightarrow$ q) $\wedge$ (q $\Leftrightarrow$ r) $\wedge$ (r $\Leftrightarrow$ p), si se cumple una se cumplen todas, se pueden mostrar de diversas formas, por ejemplo armar un ciclo p $\Rightarrow$ q $\Rightarrow$ r $\Rightarrow$ p.

# Cuantificación de las Funciones Proposicionales

## *Cuantificadores*

A partir de funciones proposicionales es posible obtener proposiciones generales mediante un proceso llamado de cuantificación. Asociados a la indeterminada x, introducimos los símbolos "**∀x**" y "**∃x**", llamados **cuantificador universal** y **cuantificador existencial,** respectivamente. Las expresiones

"para todo x, se verifica $p_{(x)}$ " se denota en símbolos por $\forall\, x : p_{(x)}$
"existe x, tal que se verifica $p_{(x)}$" se denota en símbolos por $\exists\, x : p_{(x)}$

corresponden a una función proposicional $p_{(x)}$ cuantificada universalmente en el primer caso, y existencialmente en el segundo.
Una función proposicional cuantificada universalmente es V si y sólo si son V todas las proposiciones particulares asociadas a ella. Para asegurar la verdad de una proposición cuantificada existencialmente es suficiente que sea verdadera alguna de las proposiciones asociadas a la función proposicional.

*Ejemplos*
a) Todo número natural es entero.
b) Existen números enteros que son naturales.
c) Todo número entero es racional
d) Existen números irracionales que son naturales

## *Negación de funciones proposicionales cuantificadas*

Un problema de interés, no sólo en Matemática, sino en las restantes ciencias, es la negación de funciones proposicionales cuantificadas. Por ejemplo, la negación de

"Todos los enteros son impares" $(\forall\, x : p_{(x)})$

es

"Existen enteros que no son impares" $(\exists\, x / \sim p_{(x)})$

Luego, para negar una función proposicional cuantificada universalmente se cambia el cuantificador en existencial y se niega la función proposicional. ¿Cómo se niega una función proposicional cuantificada existencialmente?

## *Teoremas- lemas- corolarios- axiomas- definiciones*

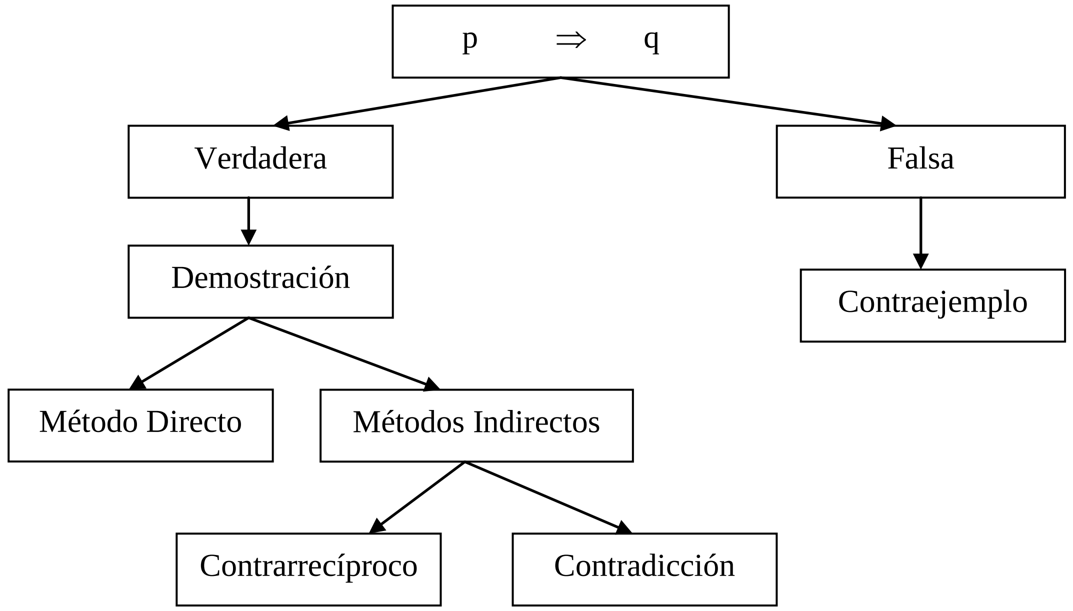
Los objetos matemáticos existen a partir de **definiciones**, estas señalan con precisión los conceptos importantes en la teoría matemática. Hay diversas afirmaciones o *proposiciones* que expresan verdades sobre estos conceptos: *axiomas*, *lemas*, *teoremas* y *corolarios*. Las *demostraciones* revelan, en forma contundente, la validez de estas afirmaciones.
Con un pequeño número de "verdades evidentes", más conocidas como **axiomas**, se podrá inferir toda una teoría matemática. Por lo tanto un axioma es una afirmación que no requiere demostración.
En cambio un **teorema** es una proposición que afirma una verdad demostrable que no es evidente por sí misma. Un **lema** es una afirmación que forma parte de un teorema más amplio; y se llama **corolario** a una afirmación lógica que sea consecuencia inmediata de un teorema, pudiendo ser demostrada usando las propiedades del teorema previamente presentado.
Resumiendo, los pilares estructurales de la matemática son: *la definición*, el *teorema* y la *demostración*. Por lo tanto, demostrar teoremas es un asunto central en la lógica matemática.

# Demostración Matemática

Todo teorema matemático se puede formular como una implicación

| P | $\Rightarrow$ | q |
|---|---|---|
| Hipótesis | | Tesis |
| Premisa | | Conclusión |

Esta implicación puede ser V o F.




En el caso de ser falsa, basta con un contraejemplo para refutarla. En el caso de ser verdadera, hay que realizar una demostración.

**Refutación**

$V(p \Rightarrow q) = F$, sólo sucede en el caso de que $V(p) = V$ y $V(q) = F$. Para dar un contraejemplo, se debe verificar que $V(p \wedge \sim q) = V$.

**Demostración**

Para realizar una demostración, se usan los llamados métodos directos o indirectos.

<u>Método directo</u>: a partir de la verdad de p se debe concluir en la verdad de q.

<u>Métodos indirectos</u>:

1. Se utiliza la implicación <u>contrarrecíproca,</u> es decir, demostrar la verdad de $p \Rightarrow q$ es equivalente a mostrar la verdad de $\sim q \Rightarrow \sim p$.
2. Por <u>contradicción</u> o reducción al <u>absurdo</u>, se supone que la implicación es falsa, es decir que se parte de un caso $V(p)=V$ y $V(q)=F$ y se debe concluir que $V(p \wedge \sim q) = F$ o una contradicción.

<u>Método de inducción</u>: cuando se tiene una función proporcional p(n) donde la variable indeterminada n es un número natural, si se prueba que:

- p(1) es cierta
- suponiendo que p(n) cierta entonces p(n+1) es cierta

Se concluye que p(n) es válida para todo n natural.