Funciones de Variable Compleja

Trabajo Práctico N° 3

1. Halle el límite de las siguientes funciones en los puntos indicados y determine el dominio donde son continuas:

(a) $f(z) = z.\overline{z}\,,\quad$ en $z_0 = -i$.

(b) $f(z) = \begin{cases} \frac{\overline{z}^2}{z}\,, & \text{si } z \neq 0 \\ 0\,, & \text{si } z = 0 \end{cases}\,,\quad$ en $z_0 = 0$.

(c) $f(z) = \dfrac{2z^2 + (2+4i)z + 4i}{z + 2i}\,,\quad$ en $z_0 = -2i$.

(d) $f(z) = e^{1/z^2}\,,\quad$ en $z_0 = 0$.

(e) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}(x-y)}{x-y} + i(1 + y^2 - x^2)\,, & \text{si } x \neq y \\ 1 + i\,, & \text{si } x = y \end{cases}\quad$ en $z_0 = 0$.

2. Se desean estudiar los siguientes límites

(a) $\lim_{z\to 0} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ (b) $\lim_{z\to 0} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ (c) $\lim_{z\to 0} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$

de la siguiente forma:

i) Calcular los límites en coordenadas polares. Reemplazar $x = r\cos\theta$, $y = r\text{sen}\theta$, y luego calcular el límite cuando r tiende a cero.

ii) Calcular los límites direccionales tomando un haz de rectas $y = mx$, y $x \to 0$.

iii) Compare los resultados obtenidos en los dos pasos anteriores.

iv) Calcular los limites direccionales tomando una parabola $x = y^2$, e $y \to 0$.

v) ¿Qué conclusión puede decir acerca de la existencia o no de los límites que se quieren estudiar? ¿En alguno de los casos puede utilizar la propiedad 3 de límites de la página 18 en la guía de teoría, sobre uniformidad en θ ?

vi) Trate de resolver el caso (b) aplicando otras propiedades, sin usar coordenadas polares.

3. Calcule los siguientes límites:

(a) $\lim_{z\to i} \dfrac{\text{Re}(z) + \text{Im}(z) - 1}{z - i}$ (b) $\lim_{z\to\infty} \dfrac{2z^4 + 1}{z^4 + 1}$

(c) $\lim_{z\to\infty} e^z$ (d) $\lim_{z\to i} \dfrac{1}{(z-i)^2}$

4. Muestre que la función $f(z) = \ln|z| + i\text{Arg}(z)$, $0 \leq \text{Arg}(z) < 2\pi$ es discontinua sobre el rayo $\text{Arg}(z) = 0$.

5. Muestre que la función $f(z) = |z|^{1/3}[\cos(\text{Arg}(z)/3) + i\,\text{sen}(\text{Arg}(z)/3)]$, $-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$, es discontinua sobre el rayo $\text{Arg}(z) = \pi$.

6. Calcule, por definición, la derivada de las siguientes funciones y determine en qué puntos del plano complejo existe.

(a) $f(z) = z^n$ (b) $f(z) = \overline{z}$

7. Sea $f(z) = |z|^2$. Verifique que las ecuaciones de Cauchy - Riemann se cumplen sólo si $z = 0$. ¿Qué se puede decir entonces acerca de la existencia de $f'(z)$ si $z \neq 0$? ¿Existe $f'(0)$? Observe que $f(z) = z\,\overline{z}$, y $z = \overline{\overline{z}}$, ¿qué puede concluir sobre el producto y composición de funciones derivables y no derivables?

8. Halle las regiones, si existen, donde las siguientes funciones son continuas, derivables y analíticas. Donde sea posible, calcule $f'(z)$.

(a) $f(z) = z\overline{z} + 2z$
(b) $f(z) = \cosh(x)\cos(y) + i\,\text{senh}(x)\text{sen}(y)$
(c) $f(z) = yx^2 - y + i\,xy^2$
(d) $f(z) = yx^3 + i(x + 2y^3)$.

9. Las ecuaciones de Cauchy - Riemann en coordenadas polares son:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}, \; r \neq 0.$$

Estudie la continuidad y la analiticidad de las siguientes funciones utilizando coordenadas polares. Donde sea posible calcular $f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + i\,v_r)$.

(a) $f(z) = \ln|z| + i\text{Arg}(z)$, $-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$.

(b) $f(z) = |z|^{1/n}\, e^{i\frac{Arg(z)}{n}}, -\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi, \quad z \neq 0$.

(c) $f(z) = \frac{-iz}{|z|^2}, \quad z \neq 0$.

10. Muestre que la función $f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3 + i(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & \text{si} \quad x + yi \neq 0 \\ 0, & \text{si} \quad x + yi = 0 \end{cases}$,

es continua y satisface las ecuaciones de Cauchy - Riemann en $z = 0$, pero no tiene derivada en ese punto. [Observe que f' y las derivadas parciales de u y v en $z = 0$ deben calcularse por definición]

11. Sea $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) - i$, donde $u(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}, & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Considere los teoremas 19, 20, 21, 22, y 23 de la guía de teoría para responder los siguientes puntos:

(a) Calcule $u_x(x,y)$ para $(x,y) \neq (0,0)$ y para $(x,y) = (0,0)$.

(b) Muestre que $u_x(x,y)$ es discontinua en $(0,0)$ [utilice límites direccionales sobre un haz de rectas $y = mx$].

(c) ¿La discontinuidad de $u_x(x,y)$ en $(0,0)$ implica que $u(x,y)$ no es diferenciable y que f no es derivable en $z = 0$?

(d) Muestre que se verifican las ecuaciones de Cauchy - Riemannn en $(0,0)$. ¿Esto implica que f es derivable en $z = 0$?

(e) ¿$u(x,y)$ es discontinua en $(0,0)$? [recuerde ejercicio 2].

(f) ¿La discontinuidad de $u(x,y)$ en $(0,0)$ implica que $u(x,y)$ no es diferenciable y que f no es derivable ni continua en $z = 0$?

12. Utilice propiedades para hallar la región del plano complejo donde las siguientes funciones son analíticas y calcule su derivada allí:

(a) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+3}$ (b) $g(z) = \dfrac{e^z}{z\cos(z)}$ (c) $f(z) = \dfrac{1}{e^z+1}$

13. Muestre que $u(x,y)$ es una función armónica y halle su armónica conjugada.

(a) $u(x,y) = Im(z^2+3z+1)$

(b) $u(x,y) = \text{sen}(x)\cosh(y)$.

(c) $u(x,y) = \text{Arg}(z)\,, \quad -\pi < \text{Arg}(z) < \pi$.

14. Halle la función analítica $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, a partir de su parte real o imaginaria, que verifique la condición indicada:

(a) $v(x,y) = e^{-y}\text{sen}(x), \quad f(\pi) = 2$. (b) $u(x,y) = 2x + x^2 - y^2 + y, \quad f(i) = 0$.

15. Muestre que:

(a) $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$,

(b) $|e^{-2z}| < 1$ si y sólo si $\text{Re}(z) > 0$.

(c) $\text{sen}(\overline{z}) = \overline{\text{sen}(z)}$

(d) $\cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\,\text{sen}(x)\text{senh}(y)$

16. Halle todos los valores de z tales que:

(a) $e^z = -2$

(b) $e^z = -1 - i$

(c) $\text{senh}(z) = 0$

(d) $\cos(z) = 5$