

Funciones de Variable Compleja

Trabajo Práctico N 9

1. Determine las imágenes:

- (a) de la circunferencia $|z - 2| = 1$
- (b) de la recta $y = -1$
- (c) de la recta $x = 1$
- (d) de la banda infinita $0 < x < 1$

bajo las transformaciones lineales:

- i. $w = 2z$
- ii. $w = iz$
- iii. $w = (1 + i)z + 3i - 1$

2. Dada la transformación $w = \frac{1}{z}$, halle las imágenes de:

- (a) la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = ax$, $a \in \mathbb{R}$
- (b) la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = by$, $b \in \mathbb{R}$
- (c) el haz de rectas $y = x + b$, $b \in \mathbb{R}$
- (d) el haz de rectas $y = ax$, $a \in \mathbb{R}$

3. Halle la imagen de las siguientes regiones por las transformaciones indicadas en cada caso.

- (a) $|z| \leq 2$ por $w = \frac{z-i}{i+z}$
- (b) la banda $0 < x < 1$ por $w = \frac{2iz-1+i}{2z+1}$

4. Halle la transformación bilineal que aplica:

- (a) los puntos $z_1 = 2$, $z_2 = i$ y $z_3 = -2$ sobre $w_1 = 1$, $w_2 = i$ y $w_3 = -1$
- (b) los puntos $z_1 = 0$, $z_2 = i$ y $z_3 = -1$ sobre $w_1 = 1$, $w_2 = \infty$ y $w_3 = 0$

5. Halle una transformación bilineal que transforme el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}$ en $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 2\}$.

6. Halle una transformación bilineal que aplique el círculo unitario sobre $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(w) > 0\}$.

7. Dada la transformación $w = e^z$, determine las imágenes de las rectas $x = a$, $y = b$ y de la banda $-\pi < y \leq \pi$.
8. Dada la transformación $w = \text{Log}z$, determine las imágenes de $|z| = r$, $\text{Arg}z = \alpha$ donde $-\pi < \alpha \leq \pi$.
9. Dada la transformación $w = \text{sen}(z)$ (recuerde que $\text{sen}(z) = \text{sen}x \cdot \text{Ch}y + i \cos x \cdot \text{Sh}y$), halle las imágenes de:
- (a) el segmento $y = c$, $-\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}$, $c \in \mathbb{R}$
 - (b) la familia de rectas $x = k$ donde $-\frac{\pi}{2} < k \leq \frac{\pi}{2}$
10. Dada la transformación $w = z^2$, determine y grafique la región del plano complejo w para cada una de las regiones siguientes:
- (a) $A = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > 0, \text{Im}(z) > 0\}$
 - (b) $B = \{z \in \mathbb{C} : xy > 1, y > 0\}$
 - (c) $C = \{z \in \mathbb{C} : x < 1, y < 1, y = 1 - x\}$