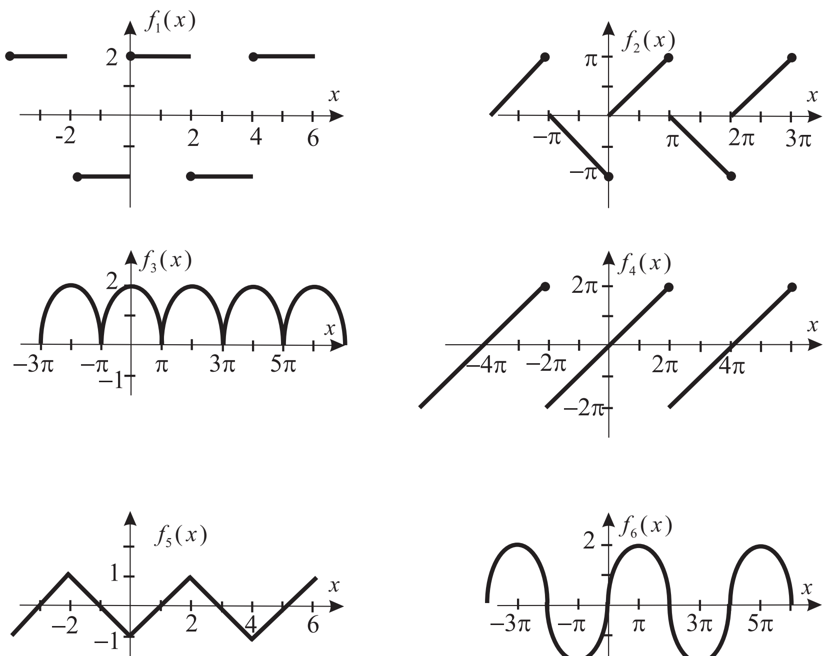
Funciones de Variable Compleja

Trabajo Práctico N° 8

1. Observe las gráficas de las siguientes funciones periódicas e indique en cada una el ***período*** ($T = 2L$) y si presenta: ***simetría par*** ($f(x) = f(-x)$), ***simetría impar*** ($f(x) = -f(-x)$), y/o ***simetría de media onda*** ($f(x + \frac{T}{2}) = -f(x)$)



2. Halle la serie de Fourier trigonométrica correspondiente a las siguientes funciones. Para cada inciso, grafique la extensión periódica de f y la función a la cual converge el desarrollo obtenido.

   (a) $f(x) = x$, $-\pi \leq x < \pi$, período 2π.

   (b) $f(x) = |sen(\pi x)|$, $-1 \leq x < 1$, período 2.

   (c) $f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad -1/3 \leq x < 0 \\ sen(3\pi x) & si \quad 0 \leq x < 1/3 \end{cases}$, período 2/3.

   (d) $f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad -1/2 \leq x < 0 \\ 1 & si \quad 0 \leq x < 1/2 \end{cases}$, período 1.

   (e) $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0 & si \quad -\pi < x < -\pi/2 \quad ó \quad \pi/2 < x < \pi \end{cases}$, período 2π.

3. (a) Hallar la serie de Fourier compleja de $f(x) = e^x$ si $-\pi < x < \pi$ y $f(x + 2\pi) = f(x)$.

   (b) Hallar la serie compleja de Fourier de $f(x) = -1$ si $-\pi < x < 0$, $f(x) = 1$ si $0 < x < \pi$.

   (c) En los desarrollos anteriores, graficar los *espectros en frecuencia* de *amplitud*, es decir $|\gamma_n|$ versus w_n, donde $w_n = \frac{n\pi}{L}$ es la frecuencia angular.

4. Obtenga el desarrollo de:

   (a) $f(x) = x(\pi - x)$, en serie de senos para $x \in [0, \pi]$.
   (b) $f(x) = e^x$, en serie de cosenos para $x \in [0, \pi]$.
   (c) $f(x) = x$, para $x \in (0, \pi]$, de período $T = \pi$.

5. Utilizando los desarrollos obtenidos en el ejercicio 2., encuentre los desarrollos de Fourier de las siguientes funciones e indique el orden de decrecimiento de sus coeficientes:

   (a) $f(x) = x^2$, $-\pi \leq x < \pi$, período 2π.
   (b) $f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad -1/3 \leq x < 0 \\ \cos(3\pi x) & si \quad 0 \leq x < 1/3 \end{cases}$, período $2/3$.
   (c) $f(x) = x + x^2$, $-\pi \leq x < \pi$, período 2π.
   (d) $f(x - \pi/2)$, donde f es la función del ejercicio 2.(e).

6. Calcule las sumas de las siguientes series utilizando la serie de Fourier hallada en el ejercicio indicado (encuentre un valor adecuado para evaluar la serie de Fourier o use la identidad de Parseval):

   (a) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$ (ejerc 2.(a), Rta.$\frac{\pi}{4}$)
   (b) $\frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} - \frac{1}{8^2-1} + ...$ (ejerc 2.(b), Rta.$\frac{\pi-2}{4}$)
   (c) $\frac{1}{1^2 3^2} + \frac{1}{3^2 5^2} + \frac{1}{5^2 7^2} + ...$ (ejerc 2.(b), Rta.$\frac{\pi^2-8}{16}$)
   (d) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ...$ (ejerc 2.(a), Rta.$\frac{\pi^2}{6}$)

7. Utilizando la igualdad de Parseval calcular los *valores eficaces* o *RMS* de las siguientes funciones periódicas:

   (a) $f(x) = sen^2(3x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos(6x) = -\frac{1}{4}e^{-i6x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{i6x}$
   (b) $f(x) = cos^2(x - 1)$

   Recuerde: $RMS(f) = \sqrt{\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f^2(x)dx} = \sqrt{\sum_{-\infty}^{\infty} |\gamma_n|^2} = \sqrt{\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{a_n}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{b_n}{\sqrt{2}}\right)^2\right)}$

8. Sin calcular los desarrollos en series de senos y en series de cosenos, indique la rapidez de decrecimiento de los coeficientes para ambos desarrollos de las funciones siguientes:

   (a) $f(x) = x(1 - x)^2$, $0 < x < 1$.
   (b) $f(x) = \begin{cases} 10x^4 - 15x^3 + 6x & si \quad 0 < x < 1 \\ 2x - x^2 & si \quad 1 \leq x < 2 \end{cases}$

9. Obtener una serie que represente a $t - t^2$ para $0 < t < 1$ y que tenga coeficientes que decrezcan como $\frac{1}{n^3}$.