Funciones de Variable Compleja
Trabajo Práctico N 7

1. Analice si las siguientes funciones cumplen las condiciones suficientes para la existencia de su transformada de Laplace. En caso afirmativo, estime la abscisa de convergencia.

   (a) $f(t) = e^{-5t}$

   (b) $f(t) = \operatorname{sen}(10t)$

   (c) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$

   (d) $f(t) = e^{t^2}$

   (e) $f(t) = e^{it^2}$

2. Calcule la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

   (a) $f(t) = 2e^{-t} + i\,t$

   (b) $f(t) = 5e^{it}$

   (c) $f(t) = e^{-3t}\operatorname{sen}(2t)$

   (d) $f(t) = \operatorname{sen}\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$

   (e) $f(t) = t\cosh(3t)$

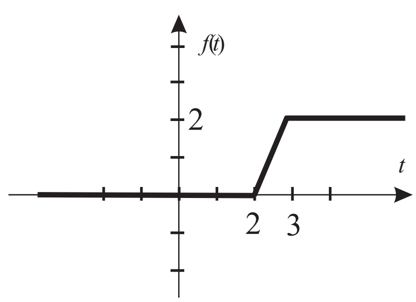
   (f) $f(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(u)du$

3. Exprese a las siguientes funciones utilizando a la función de Heaviside: $h(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ 1 & si \quad t > 0 \end{cases}$ luego encuentre sus correspondientes transformadas de Laplace.

   (a) $f(t) = \begin{cases} t^2 & si \quad t > 4 \\ 0 & si \quad t < 4 \end{cases}$

   (b) $f(t) = \begin{cases} \cos t & si \quad t < \pi \\ t & si \quad t \geq \pi \end{cases}$

   (c) $f(t)$ es la función indicada en el gráfico:



4. Halle, si es posible, la transformada inversa de Laplace.

   (a) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s+6}\right)$

   (b) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1-i}{s+2i} + \frac{1+i}{s-2i}\right)$

   (c) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2}{s+1}\right)$

   (d) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)(s+3)}\right)$

   (e) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{12e^{-2s}}{s^2-9}\right)$

   (f) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{n\pi}{(s+1)^2+n^2\pi^2}\right)$

   (g) $\mathcal{L}^{-1}(\operatorname{arctg}(s))$

5. Halle la convolución de $f(t)$ y $g(t)$, luego compruebe la propiedad de la transformada de Laplace de la convolución.

   (a) $f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ \operatorname{sen}(t) & si \quad t \geq 0 \end{cases}$ $\qquad g(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq 0 \\ 1 & si \quad t > 0 \end{cases}$

   (b) $f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ e^t & si \quad 0 < t < 1 \\ 0 & si \quad t > 1 \end{cases}$ $\qquad g(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq 0 \\ 1 & si \quad t > 0 \end{cases}$

6. Calcule la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

   (a) $f(t) = \frac{1-\cos(2t)}{t}$

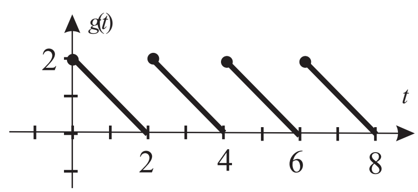
   (b) $f(t) = |\operatorname{sen} t|$

   (c) $f(t) = (t-1)^2 e^{2t} sh(3t)$

   (d) $f(t) = \int_0^{2t} \operatorname{sen}(u) du$

   (e) $f(t) = t \int_0^t \operatorname{senh}(t-u) \operatorname{sen}^2 u du$

   (f) $f(t) = e^{-5t} g(2t)$ donde $g(t)$ es la función periódica indicada en el gráfico:



7. Halle la transformada inversa de Laplace.

   (a) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5s+1}{s^2-s-12}\right)$

   (b) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2-15s+41}{(s+2)(s-3)^2}\right)$

   (c) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s(s^2+1)}\right)$

   (d) $\mathcal{L}^{-1}\left(\ln\left(\frac{s}{s-1}\right)\right)$

   (e) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2}{(s^2+25)^2}\right)$

   (f) $\mathcal{L}^{-1}\left(\operatorname{arctg}(\frac{1}{s})\right)$

   (g) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4s^2-5s+6}{(s+1)(s^2+4)}\right)$

8. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

   (a) $y' + 3y = e^{-2t}$, $y(0) = 2$

   (b) $y'' + \pi^2 y = 0$, $y(0) = 2$ $y'(0) = 0$

   (c) $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3t}$, $y(0) = 5$ $y'(0) = 7$

   (d) $y(t) = t + \int_0^t y(u) \operatorname{sen}(t-u) du$

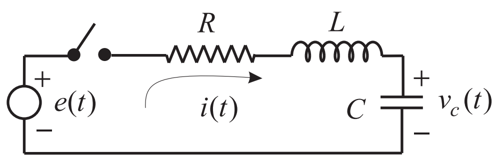
   (e) $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_1 \end{cases}$, $y_1(0) = 1$ $y_2(0) = 0$

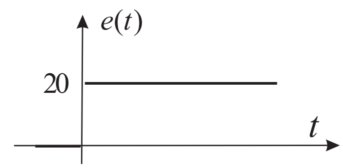
   (f) $y' + 3y + 2\int_0^t y(u) du = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 2 & si \quad 1 < t < 2 \\ 0 & si \quad t \geq 2 \end{cases}$, $y(0) = 0$

9. Calcule las siguientes integrales utilizando la definición de transformada de Laplace:

   (a) $\int_0^\infty te^{-2t}\cos t dt$
   (b) $\int_0^\infty e^{-t}\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}dt$
   (c) $\int_0^\infty \int_0^t e^{-t}\operatorname{sen}(u)dudt$
   (d) $\int_0^\pi e^{-2t}\cos t dt$
   (e) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}dt$ (recuerde la convergencia analizada en el práctico 1)

10. Aplicaciones. El circuito eléctrico de la figura está formado por un reistor R, un capacitor C y una inductor L conectados en serie a una fuente de voltaje $e(t)$. Antes de cerrar el interruptor en el tiempo $t = 0$, tanto la tensión en bornes del capacitor $v_c(t)$ como la corriente del circuito $i(t)$ son cero, es decir: $i(0) = 0$ y $v_c(0) = 0$.





Al plantear las leyes de Kirchhoff en el circuito, surge la siguiente ecuación diferencial:

$$R\,i(t) + L\frac{d\,i(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(u)du = e(t)$$

donde $R = 160\Omega$, $L = 1$ Hy, $C = 10^{-4}$ F y $e(t) = 20h(t)$volts.

   (a) Muestre que $\mathcal{L}(i(t)) = I(s) = \frac{20}{(s+80)^2+60^2}$.
   (b) Antitransforme y obtenga la corriente eléctrica del circuito $i(t)$.
   (c) Si la tensión en bornes del capacitor es $v_c(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(u)du$, muestre que $\mathcal{L}(v_c(t)) = V_c(s) = \frac{20}{10^{-4}s[(s+80)^2+60^2]}$.
   (d) ¿Es posible saber sin antitrasformar, a que tensión se carga el capacitor cuando $t \to \infty$? (Teorema del Valor Final). Antitransforme y compruebe el resultado anterior.