Funciones de Variable Compleja

Trabajo Práctico N 6

1. Determinar las singularidades de las siguientes funciones, luego clasicarlas usando desarrollos en serie de Laurent:

   (a) $f(z) = \frac{1-cos(z-1)}{z-1}$ (b) $f(z) = e^{\frac{1}{z-i}}$ (c) $f(z) = \frac{(e^z-1)}{z^2}$

2. Determinar y clasificar todas las singularidades de la siguientes funciones. Si la singularidad es evitable, redefinir la función para que en ese punto sea analítica. Calcular los residuos en cada caso.

   (a) $f(z) = \frac{z^2+1}{z}$ (b) $f(z) = \frac{2}{z^2} + \frac{31}{z-\pi}$ (c) $f(z) = z^2 e^{-z^4}$

   (d) $f(z) = \frac{1-\cos(z-1)}{z-1}$ (e) $f(z) = \cosh\frac{1}{z}$ (f) $f(z) = \frac{\cos(z+i)-1}{(z+i)^4}$

   (g) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(e^z-1)}$ (h) $f(z) = e^{\frac{z}{z-2}}$ (i) $f(z) = \dfrac{z}{\operatorname{sen} z}$

3. Dada la función $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}-1}{z}$, se desea probar que no existe (y no es infinito) el $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$. Considere si las siguientes opciones son factibles:

   - Límites direccionales.
   - Desarrollo de Laurent en $z_0 = 0$.
   - Probando que $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{-1}{n}) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{i}{2n\pi})$. [prop. 6, pag. 36 de la guía de teoría]

4. Aplicar el Teorema de los Residuos para evaluar las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{dz}{(z-1)(z-2)}$. (b) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{dz}{z^4+4z^3}$.

   (c) $\displaystyle\int_{|z|=1} e^{-1/z}\operatorname{sen}(z^{-1})dz$. (d) $\displaystyle\int_{|z|=5} \frac{e^z}{\cosh z}dz$. (e) $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{e^z}{(z^3+1)z}dz$

   donde γ es el cuadrado de vértices $2+2i$, $-2+2i$, $-2-2i$ y $2-2i$.

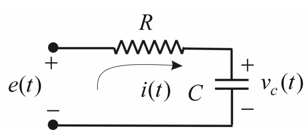
5. Expresar las siguientes funciones racionales en fracciones parciales utilizando el cálculo de residuos.

   (a) $f(z) = \frac{z+12}{z^2+4z}$ (b) $f(z) = \frac{10-4z}{(z-2)^2}$

   (c) $f(z) = \frac{2}{z^2(z+1)}$ (d) $f(z) = \frac{z^4+2z^3}{z^3-1}$

   Observe que en (d) el grado del polinomio numerador es mayor que el grado del polinomio denominador, realice el cociente y luego desarrolle en fraciones parciales al resto dividido por el divisor.

6. La ecuación diferencial: $e(t) = RCv_c'(t)+v_c(t)$, modela la evolución temporal de la tensión en el capacitor de un circuito serie RC,



con $v_c(0) = 0\text{v}$, $e(t) = 10\text{v}$, $R = 200 \cdot 10^3\Omega$ y $C = 50 \cdot 10^{-6}\text{F}$.

   (a) Encuentre una solución en series de potencias, analítica en $t = 0$, es decir determine los coeficientes de la serie: $v_c(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

   (b) Suponga que por efectos térmicos la resistencia tiene la siguiente variación: $R = 200 \cdot 10^3(1 + 10^{-1}t)\Omega$. Encuentre una nueva solución en serie de potencias.

   (c) Si es posible, identificando desarrollos conocidos, encuentre la función suma en ambos casos.

7. Se desea calcular utilizando residos, la integral impropia real $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-2}{(x^2+1)^2}dx$. Considere el contorno de integración de la figura $C = C_R + C_L$, donde C_R es una semicircunferencia, C_L es un segmento, y $f(z) = \frac{z-2}{(z^2+1)^2}$. Siga los pasos:

   (a) Calcule la integral $\int_C f(z)\, dz$.

   (b) Encuentre una cota $M.L$ tal que $\left|\int_{C_R} f(z)\, dz\right| \leq M.L.$ y $M.L. \to 0$ cuando $R \to \infty$.

   (c) Evalué el límite: $\lim\limits_{R\to\infty} \int_C f(z)\, dz = \lim\limits_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz + \lim\limits_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x-2}{(x^2+1)^2}dx$, y obtenga de ahí el V.P.C. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-2}{(x^2+1)^2}dx$.

   (d) ¿$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-2}{(x^2+1)^2}dx =$ V.P.C. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-2}{(x^2+1)^2}dx$?