Funciones de Variable Compleja

Trabajo Práctico N 5

1. Hallar, si existe, el límite de las siguientes sucesiones de números complejos:

   a) $z_n = (-1)^n - \dfrac{i}{n}$, b) $z_n = n^{1/n} + i\,r, \;\; r \in \mathbb{R}$,

   c) $z_n = \dfrac{n}{n+3i} - i\,\dfrac{n}{n+1}$, d) $z_n = e^{in}$,

   e) $z_n = n\,i^n$, f) $z_n = \sqrt{n}\,(\,\sqrt{n+2i} - \sqrt{n+i}\,)$,

   con $\sqrt{1} = 1$, $0 \leq \operatorname{Arg} z < 2\pi$.

2. Dada $z_n = -1 + \frac{(-1)^n}{n} i$, graficar los primeros puntos (para $n = 1, 2, 3, 4$) y analizar la convergencia de las sucesiones:

   $$\{z_n\},\; \{|z_n|\},\; \{\operatorname{Arg} z_n\},\; \text{y}\; \{\operatorname{Arg}(z_n + \bar{z}_n)\}, \qquad \text{con } -\pi < \operatorname{Arg} z_n \leq \pi.$$

3. Analizar la convergencia de las siguientes series, indicando si es absoluta o condicional:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^2}$, $\theta \in \mathbb{R}$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{in\theta}$,

   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$, e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{4n+1}$, f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i(n+1)}\sqrt{n}}{n+1}$.

4. Hallar la región de convergencia absoluta de las siguientes series de funciones:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{n-1} z^{n-1}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\,(z+1)^n$,

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z+2}{z}\right)^n$, (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (z+i)^n}$, (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3)^n}{n^2}$.

5. Calcular la suma de las series de los incisos (a), (d) y (e) del ejercicio anterior, y analizar la convergencia en la frontera de las regiones encontradas para las series de los incisos (b), (d) y (f).

6. Aplicando el criterio de Weierstrass, verificar que las siguientes series convergen uniformemente en los conjuntos indicados:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}, \{z : |z| \leq 1\}.$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z^2-1)^n}, \{z : |z| > 2\}.$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{inz}, \{z : Im(z) \geq r > 0\}.$

7. Desarrolle si es posible, las siguientes funciones en serie de Taylor en torno a los puntos dados y determine en cada caso el radio de convergencia:

   (a) $f(z) = \frac{1}{1-z}, \quad z_0 = 0.$ (b) $f(z) = e^z, \quad z_0 = 0.$

   (c) $f(z) = \overline{z} + 2, \quad z_0 = -2.$ (d) $f(z) = \text{sen}z, \quad z_0 = 0.$

   (e) $f(z) = \cosh z, \quad z_0 = 0.$ (f) $f(z) = e^z, \quad z_0 = i.$

   (g) $f(z) = x^2 + y^2, \quad z_0 = 0.$ (h) $f(z) = \cos z, \quad z_0 = \pi/2.$

   (i) $f(z) = 3z^2 + 4z - 2, \quad z_0 = 2.$

8. Si cada una de las siguientes funciones admite desarrollo en serie de Taylor para los puntos dados, indicar cuál es el disco de convergencia sin efectuar el desarrollo:

   (a) $f(z) = \frac{sen(z)}{z^2+4}, \quad z_0 = 0.$

   (b) $f(z) = \frac{e^z}{e^z+1}, \quad z_0 = 0.$

   (c) $f(z) = e^{-z^2}\text{senh}(z+2), \quad z_0 = 0.$

   (d) $f(z) = \frac{z+3}{(z-1)(z-4)}, \quad z_0 = 2.$

9. Usando desarrollos de Taylor calcule las sumas:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}.$

10. Desarrolle las siguientes funciones en serie de potencias en torno a los puntos dados y determine en cada caso el radio de convergencia (si es posible utilice desarrollos de Taylor conocidos, obtenidos en ejercicios previos)

    (a) $f(z) = e^{3z}, \quad z_0 = 0.$
    (b) $f(z) = \text{sen}(z+1), \quad z_0 = -1.$
    (c) $f(z) = z\cosh(2z), \quad z_0 = 0.$
    (d) $f(z) = e^{iz}, \quad z_0 = i.$
    (e) $f(z) = \frac{1}{1+z}, \quad z_0 = 1.$

11. ¿Cómo puede obtener el desarrollo de $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ en un entorno de $z_0 = 0$ a partir del desarrollo 1.(a)? [Sug. observe la derivada de $\frac{1}{(1-z)}$]

12. Integre la serie de Taylor en potencias de w para $f(w) = \frac{1}{1+w}$ a lo largo de una curva interior al círculo de convergencia desde $w = 0$ hasta $w = z$ para obtener la representación:

$$\text{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, \qquad |z| < 1, \qquad -\pi < \text{Arg}\, w \leq \pi.$$

13. Hallar la serie de Taylor en potencias de z para cada una de las siguientes funciones:

    (a) $f(z) = \displaystyle\int_0^z e^{w^2} dw.$
    (b) $f(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{sen(w)}{w} dw.$

14. Desarrolle en serie de Taylor en torno de $z = 3i$ las funciones $f(z) = 1 - e^{(z-3i)}$ y $g(z) = sen(z-3i)$, luego evalúe $\lim\limits_{z \to 3i} \frac{f(z)}{g(z)}$. Observe si además se podría resolver aplicando la Regla de L'Hopital.

15. Hallar el desarrollo de Laurent de las siguientes funciones en las regiones indicadas:

    (a) $f(z) = \frac{1}{z-2}, \quad |z| > 2.$
    (b) $f(z) = \text{sen}\frac{1}{z}, \quad |z| > 0.$
    (c) $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}, \quad |z| > 1.$
    (d) $f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^3}, \quad 0 < |z| < \infty.$
    (e) $f(z) = \frac{1-cos(z-1)}{z-1} \quad |z-1| > 0$
    (e) $f(z) = e^{\frac{1}{z-i}} \quad |z-i| > 0$

16. Hallar tres desarrollos distintos de $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z-i)}$ en serie de Laurent en potencias de $z - 2$