Funciones de Variable Compleja

Trabajo Práctico N° 4

Funciones Multivaluadas

1. Teniendo en cuenta la siguiente notación:

   $\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\mathrm{Arg}(z)$, $z \neq 0$, $-\pi < \mathrm{Arg}(z) \leq \pi$,

   $\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$, $z \neq 0$, $\arg(z) = \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

   (a) Pase a la forma binómica los siguientes números complejos:

   $\log(-1)$ $\qquad$ $\mathrm{Log}(\frac{1-i}{\sqrt{2}})$ $\qquad$ $\mathrm{Log}(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$.

   (b) Muestre que:

   (i) $\log(z_1\, z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$. $\qquad$ (ii) $\log(z_1/z_2) = \log(z_1) - \log(z_2)$.

   Observación. Ambas igualdades deben entenderse en el sentido que cada valor del primer miembro es un valor del segundo miembro y recíprocamente.

2. ¿Son válidas las propiedades anteriores para la función $\mathrm{Log}\, z$?

3. Muestre que:

   (a) $e^{\mathrm{Log}\, z} = z$ para toda rama de $\log z$, y para todo número complejo no nulo. Sin embargo, la igualdad: $\mathrm{Log}\, e^z = z$, no vale para todo z, independientemente de la rama que se elija.

   (b) Existe una rama del logaritmo para la cual $\mathrm{Log}(1+i)^2 = \ln 2 + i\frac{5}{2}\pi$, pero cualquiera sea la rama escogida $2\mathrm{Log}(1+i) \neq \ln 2 + i\frac{5}{2}\pi$

4. Sea $f(z) = \mathrm{Log}(\frac{1+iz}{1-iz})$. Considere la rama principal ($k = 0$) del logaritmo con $-\pi < \mathrm{Arg}(z) \leq \pi$. Halle la región del plano complejo donde f es analítica y calcule su derivada allí.

5. Verifique que:

   (a) $\operatorname{arc\,sen} z = \frac{1}{i}\log(iz + \sqrt{1 - z^2})$

   (b) $\operatorname{arc\,cos} z = \frac{1}{i}\log(z + \sqrt{z^2 - 1})$

   (c) $\operatorname{arc\,tg} z = \frac{i}{2}\log(\frac{1-iz}{1+iz}) = \frac{i}{2}\log(\frac{i+z}{i-z})$

6. (a) Halle todos los valores de $\operatorname{arc\,sen} 0$.

   (b) Resolver la ecuación: $\operatorname{tg} z = 2i$.

7. *Ramas y puntos de ramificación de* $\sqrt{z}$.

   (a) Dada la función multivaluada $f(z) = \sqrt{z}$, $0 \leq \operatorname{Arg}(z) < 2\pi$. Considere un punto z que recorre una circunferencia alrededor de $z = 0$, partiendo del eje real positivo. Elija una rama de f o función univaluada que varíe continuamente sobre la curva, verifique que al finalizar el recorrido, su imagen no regresa al valor inicial, si no que se acerca al valor de la "otra rama". Luego $z = 0$ es un punto de ramificación.

   (b) ¿Cúal es el punto de ramificación de $f(z) = \sqrt{z - 1}$?

   (c) Calcule los siguientes límites:

      (i) $\lim_{z\to 1}\sqrt{z}, \quad 0 \leq \operatorname{Arg(z)} < 2\pi, \sqrt{1} = 1.$

      (ii) $\lim_{z\to 1}\sqrt{z}, \quad -\pi < \operatorname{Arg(z)} \leq \pi, \sqrt{1} = 1$.

8. Potencias y raíces de números complejos.

   (a) Calcule $\left(\sqrt{-1 + i\sqrt{3}}\right)^3$ y $\sqrt{(-1 + i\sqrt{3})^3}$

   (b) Calcule $\left(\sqrt[4]{-1 + i\sqrt{3}}\right)^2$ y $\sqrt[4]{(-1 + i\sqrt{3})^2}$

   (c) Observando (a) y (b), ¿qué puede decir de la propiedad $\sqrt[n]{z^m} = (\sqrt[n]{z})^m$?

Integrales de contorno

9. Calcular las integrales de contorno

   $I_1 = \int_\gamma Re(z)\, dz \qquad I_2 = \int_\gamma Im(z)\, dz \qquad I_3 = \int_\gamma z\, dz \qquad I_4 = \int_\gamma \overline{z}\, dz$

   a lo largo de las siguientes curvas, que unen $z_1 = 0$ y $z_2 = 1 + i$,

   (a) $\gamma_1 : z(t) = t + it,\ 0 \le t \le 1.$

   (b) $\gamma_2 : z(t) = 1 - \cos t + i\, \mathrm{sen} t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$

   (c) $\gamma_3 : z(t) = \begin{cases} t & si \quad 0 \le t \le 1 \\ 1 + (t-1)i & si \quad 1 < t \le 2 \end{cases}.$

10. Probar que

    (a) $\left| \int_\gamma \frac{\overline{z}}{\overline{z}+1}\, dz \right| \le \frac{8\pi}{3}$, si $\gamma : |z| = \frac{2}{3}$, recorrida en sentido positivo.

    (b) $\left| \int_\gamma \frac{e^z}{z} dz \right| \le \pi e$, si γ es la semicircunferencia unitaria contenida en el semiplano superior, recorrida en sentido positivo.

    (c) si $|a| \ne R$ entonces $\left| \int_\gamma \frac{dz}{(z-a)(z+a)} \right| < \frac{2\pi R}{\left| R^2 - |a|^2 \right|}$, donde $\gamma : |z| = R.$

11. Hallar el valor de la integral $\int_\gamma a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0\, dz$, donde γ es una curva arbitraria con punto inicial en $z_1 = 0$ y punto final $z_2 = 1$.

12. En el ejercicio 9, ¿qué integrales pueden resolverse directamente utilizando una primitiva?, ¿ por qué?

13. Hallar el valor de las siguientes integrales:

    (a) $\int_\gamma \frac{\mathrm{sen}(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} dz$, donde $\gamma : z(t) = \cos t + it,\ t \in [0,1]\,,\quad \sqrt{1} = -1, \quad -\pi < Arg(z) \le \pi.$

    (b) $\int_\gamma z^2\, \mathrm{senh} z\, dz$, donde γ es una curva que une 0 e i.

    (c) $\int_\gamma z\, \mathrm{sen}(z)\, dz$, donde $\gamma : z(t) = t + i\frac{\mathrm{sen}(t)}{t},\ t \in [\pi, 3\pi].$

14. Evaluar la integral $\int \frac{1}{\sqrt{z}} dz$ a lo largo de los siguientes contornos:

    (a) la semicircunferencia $|z| = 1$, $\mathrm{Im}\, z \ge 0$, $\sqrt{1} = 1$, $0 \le \mathrm{Arg}(z) < 2\pi$.

    (b) la semicircunferencia $|z| = 1$, $\mathrm{Im}\, z \ge 0$, $\sqrt{1} = -1$, $0 \le \mathrm{Arg}(z) < 2\pi$.

    (c) la circunferencia $|z| = 1$, $\sqrt{-1} = i$, $0 \le \mathrm{Arg}(z) < 2\pi$.

15. Calcular:

   (a) $\int_{|z|=1} \operatorname{Log} z\, dz$, donde $\operatorname{Log} 1 = 0$, $-\pi < \operatorname{Arg}(z) \leq \pi$.

   (b) $\int_{|z|=1} z^{\alpha}\, dz$, donde $1^{\alpha} = 1$, $\alpha \in \mathbf{C}$, $0 \leq \operatorname{Arg}(z) < 2\pi$.

   (c) $\int_{\gamma} \frac{\operatorname{Log}^3 z}{z}\, dz$, donde $\operatorname{Log} 1 = 0$, $\pi < \operatorname{Arg}(z) \leq 3\pi$ y $\gamma : z = e^{it}$, $t \in [0, \pi]$.

   (d) $\int \frac{z\operatorname{Re}(z)}{|z|}\, dz$, a lo largo de la curva $z = Re^{it}$, $t \in [-\pi, \pi)$.

   (e) $\int (\frac{z^2}{2R} + \frac{R}{2})\, dz$, a lo largo de la misma curva que en (d).
   Observe que $\frac{z\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \frac{z^2}{2R} + \frac{R}{2}$ sobre la curva, ¿se puede aplicar el teorema de Cauchy-Goursat?

16. Calcular las siguientes integrales:

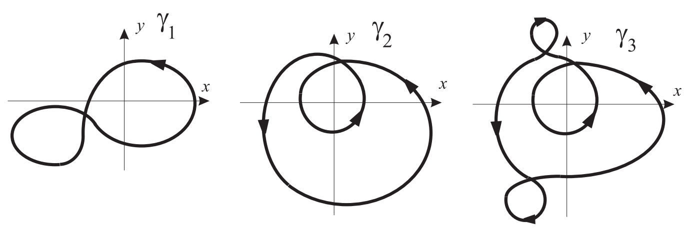
   (a) $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$, recorrida en sentido positivo.

   (b) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}$, recorrida en sentido negativo.

   (c) $\int_{|z-1|=4} \frac{z-1}{z(z+1)(z+2)}\, dz$, recorrida en sentido positivo.

   (d) $\int_C \frac{z^2-1}{z^2+1}\, dz$, donde C es la unión de las curvas $|z - i| = 1$ recorrida en sentido antihorario y $|z - i| = 3/2$ recorrida en sentido horario.

17. Calcular el valor de la integral $\int \frac{e^z - e^{-z}}{z^4} dz$ a lo largo de las siguientes curvas:



18. Calcular las integrales $\displaystyle\int_C \frac{e^{3iz}}{(z+1)(z-1)} dz$ y $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{z}{(z+1)(z+2)} dz$
   donde las curvas γ y C, se muestran en las siguientes figuras