Funciones de Variable Compleja

Trabajo Práctico N° 2 *Números Complejos*

1. Probar que:

   (a) $|z|^2 = |z^2| = z\overline{z}$

   (b) $\mathrm{R}e\, z = \frac{z+\overline{z}}{2}$

   (c) $\mathrm{I}m\, z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

   (d) $\mathrm{R}e\, z \leq |\mathrm{R}e(z)| \leq |z|$

   (e) Si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ entonces:

   (i) $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ [Ayuda: utilizar la igualdad $e^{i\theta} = cos\,\theta + isen\,\theta$]

   (ii) Si $z_1 \neq 0$ entonces $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1} e^{-i\theta_1}$

   (f) $|z+w| \leq |z| + |w|$

   (g) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ y $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

2. Escribir en forma polar los siguientes números complejos:

   $z_1 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$, $z_2 = -4i$, $z_3 = iz_1z_2$, $z_4 = 4+3i$, $z_5 = \frac{(2+2i)^6}{(i-1)^3}$,

   de manera tal que el argumento se encuentre en los siguientes intervalos:

   (a) $[0, 2\pi)$ (b) $[-4\pi, -2\pi)$ (c) $[15\pi, 17\pi)$ (d) $[-3\pi, -\pi)$

3. Hallar todos los z tales que:

   (a) $\frac{1}{z} = \frac{1}{i} + \frac{3}{1+i}$ (b) $z = \overline{z}$ (c) $|z - i| = 0$ (d) $\begin{cases} z^2 = \overline{z} \\ (z+\overline{z}-2)(z-\overline{z}) = 0 \end{cases}$

   (e) $\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$ (f) $z^3 = -1$, (g) $z^4 = -3/2 - i3\sqrt{3}/2$

4. Probar que si $z \neq 1$, entonces $1 + z + z^2 + \cdots z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$.

   (esta fórmula permite sumar los primeros $n+1$ términos de una sucesión geométrica)

5. Dadas las siguientes descripciones de lugares geométricos, exprésela en forma de ecuación compleja (utilice el concepto de distancia entre dos puntos o números como el módulo de su diferencia):

- La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos z cuya distancia a un punto z_0 determinado (el centro), es un valor r dado (el radio).
- La elipse es el lugar geométrico de los puntos z tales que la suma de su distancia a dos puntos fijos z_1 y z_2 (los focos), es una constante k dada, que equivale a la longitud del eje mayor de la elipse.
- La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos z tales que el valor absoluto de la diferencia entre sus distancias a dos puntos fijos z_1 y z_2 (los focos), es igual a una constante k, que equivale a la distancia entre los vértices.

Para cada z del lugar geométrico, considere el triángulo: $z_1 \overset{\triangle}{z} z_2$. Usando las desigualdades triangulares encuentre condiciones que deben cumplir las constantes dadas en las descripciones de hipérbola y elipse.

6. Verificar que $z = i$ es una raíz de la ecuación $z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 2z + 5 = 0$ y encontrar las otras tres raíces.

7. Mostrar que la ecuación de una recta ($\alpha = 0$) o una circunferencia ($\alpha \neq 0$ y $\beta\overline{\beta} > \alpha\gamma$) en el plano complejo puede escribirse como:

$$\alpha z\overline{z} + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + \gamma = 0, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R},\ \beta \in C.$$

8. Representar gráficamente todos los puntos z tales que:

(a) $\mathrm{R}e(z) \geq 3$	(b) $\|z\| < 4$
(c) $\mathrm{R}e(z^2) = 4$	(d) $\mathrm{I}m(z^2) = 2$
(e) $\|z - i\| \leq 2$	(f) $\mathrm{Arg}(\frac{z+1}{z-1}) = \frac{\pi}{2}, \quad z \neq 1$
(g) $\|\frac{z+1}{z-1}\| = 2, \quad z \neq 1$	(h) $z = (1+i) + \sqrt{2}e^{it}, \quad t \in \mathbb{R}$
(i) $\|z - 1\| < \|z + 3\|$	(j) $\|z\| > 1$
(k) $z = (1+i)t + 1, \quad t \in \mathbb{R}$	(l) $\|\mathrm{Arg}_1(iz)\| < \pi/4, \quad 0 \leq \mathrm{Arg}_1(z) < 2\pi$
(m) $\|\mathrm{Arg}_2(iz)\| < \pi/4, -\pi \leq \mathrm{Arg}_2(z) < \pi$	(n) $\mathrm{Arg}_1(z^4) = \pi, \quad 0 \leq \mathrm{Arg}_1(z) < 2\pi$
(o) $1 < \|z - 1 + i\| < 2$	(p) $\|z - 2\| + \|z + 2\| = 5$
(q) $\|z - 2\| - \|z + 2\| = 3$	(r)$\|z - 2\| - \|z + 2\| = 5$

Observación: $\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2) + 2n\pi$,
donde n puede tomar los valores 0, 1, ó -1, según sean z_1 y z_2, y la definición de Arg.

9. Indicar si los conjuntos graficados en el ejercicio 8 son: abiertos, cerrados, acotados o conexos.