Funciones de Variable Compleja

Trabajo Práctico N° 10

(fecha límite de entrega para obtener la promoción: 06/03/20)

Ejercicio 1 .**Transformaciones en el plano complejo. Conservación de ángulos y puntos interiores - Principio de Variación del Argumento**.

1. Sea A el rectángulo: $-1 \leq x \leq 0$; $-2\pi < y \leq 0$. Encuentre las imágenes de A al aplicarle las transformaciones $w_1 = z^2$ y $w_2 = e^z$. Luego responda las siguientes preguntas:

   a) ¿Las transformaciones son conformes en la región A? ¿Son biyectivas? En cada caso que sea posible encuentre su respectiva transformación inversa.

   b) ¿Se cumple la propiedad de conservación de ángulos? ¿Por qué? Si es posible, encuentre ejemplos en cada caso.

   c) ¿Se cumple siempre que la imagen de un punto interior es un punto inetrior del conjunto imagen y la imagen de un punto frontera es un punto frontera?¿Por qué? Si es posible, encuentre ejemplos en cada caso.

2. Sea C la circunferencia $|z + i| = 1$ descripta en sentido positivo. Halle el valor de $\Delta_C \arg f(z)$ e indique cuántas vueltas netas alrededor del origen dará la curva imágen al aplicarle a C las siguientes transformaciones:

   (a) $f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$ (b) $f(z) = \dfrac{(4\,z + 2i)^2}{z^3 - 1}$

   Encuentre la imagen de C al aplicarle la transformación (a) y compruebe la $\Delta_C \arg f(z)$ calculada.

3. Sea C la circunferencia $|z| = 1$ descripta en sentido positivo, y considere la transformación: $w = \frac{z}{z+1}$. Responda y justifique los siguientes puntos:

   a) Sin transformar, diga si la imagen de la curva C ¿es un círculo o una recta?

   Si la imagen de C es un círculo, ¿encierra o no al origen?

   Si la imagen de C es una recta, ¿pasa o no por el origen?

   b) Halle la imagen de C y compruebe los resultados que anticipó.

Ejercicio 2 .Espacio de funciones y Series de Fourier

1. Dado el conjunto $M = \{1, \cos(x)\}$ en $C[-\pi, \pi]$, responda los siguientes puntos:

   a) ¿M es linealmente independiante?

   b) ¿M es ortogonal?

   c) ¿M es ortonormal? Si no lo es, ¿podría normalizarlo?

   d) ¿Es posible expresar a los vectores $v_1(x) = \operatorname{sen}(x/2)\cos(x/2)$ y $v_2(x) = \cos^2(x/2)$ como combinación lineal de los elementos de M. Si no es posible, encuentre una combinación que minimice el error medio cuadrático.

2. Sea $P_0(x) = a_0$ y $P_1(x) = b_0 + b_1 x$.

   a) Encuentre los números a_0, b_0, b_1 para que $\{P_0, P_1\}$ sea un conjunto ortonormal en $C[-1, 1]$.

   b) Calcular los coeficientes de Fourier de la función $f(x) = x^2 + x$ en $C[-1, 1]$ correspondientes al conjunto de polinomios ortonormales $\{P_0, P_1\}$ encontrado en el inciso anterior.

   c) Compare la aproximación de $f(x)$ utilizando los coeficientes de Fourier calculados en el ejercicio anterior $[f(x) \sim c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x)]$ y una aproximación lineal con la fórmula de Taylor $[f(x) \sim f(0) + f'(0)\,x]$. Grafique la función y las dos aproximaciones en el intervalo $[-1, 1]$. Calcule el error de aproximación en ambos casos (norma del vector error), ¿cuál es menor?

Ejercicio 3 .Integral de Fourier y Transformada de Fourier

1. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } |x| < 1 \\ 0 & \text{cuando } |x| > 1 \end{cases}$

   a) encontrar la transformada de Fourier de $f(x)$.
   [Ayuda: $\mathcal{F}(w) = \Phi(f(x))_{(w)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-iwx} dx$]

   b) representar a $f(x)$ como una integral compleja de Fourier y graficar su espectro en frecuencias de módulo, es decir: $|\mathcal{F}(w)|$ en función de w.
   [Ayuda: $f(x) = \text{V.P.C.} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(w)\, e^{iwx} dw$].

2. Use propiedades y el inciso anterior para encontrar la transformada de Fourier de:

$$g_1(x) = \begin{cases} \pi & \text{cuando } |x-3| < 1 \\ 0 & \text{cuando } |x-3| > 1 \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} e^{i\,x} & \text{cuando } |x| < 1 \\ 0 & \text{cuando } |x| > 1 \end{cases}$$

$$g_3(x) = \begin{cases} \pi\, e^{-i\,x} & \text{cuando } |x+2| < 1 \\ 0 & \text{cuando } |x+2| > 1 \end{cases}$$

3. Sea $h(x)$ la función escalón (Heaviside). Usando la definición dada en las propiedades de la pag. 85, obtenga el producto de convolución: $e^x.h(x) * h(x-1)$.

4. **Fórmula de inversión compleja de Laplace**. Sea $F(s) = \left(\frac{4s+2}{s^3}\right) e^{-2s}$, siguiendo los siguientes pasos se calcula la integral $\frac{\text{V.P.C.}}{2\pi i}\int_{2-i\,\infty}^{2+i\,\infty} e^{st}F(s)ds$, para obtener la antitransformada de $F(s)$:

   a) Para $t > 2$

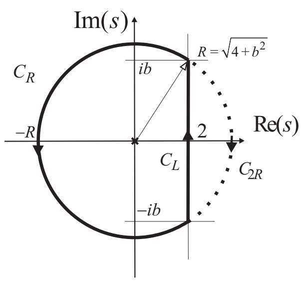
      1) Calcule la integral $\int_{C_R+C_L} e^{st}F(s)ds$, [utilice el contorno de integración de la figura y el teorema de los residuos].

      2) Encuentre una cota $M.L$ que tienda a cero cuando $b \to \infty$ para la integral $\left|\int_{C_R} e^{st}F(s)ds\right| \leq M.L$.

      3) Evalué el límite: $\lim\limits_{b\to\infty}\int_{C_R+C_L} e^{st}F(s)ds = \lim\limits_{b\to\infty}\int_{C_R} e^{st}F(s)ds + \lim\limits_{b\to\infty}\int_{C_L} e^{st}F(s)ds$, y obtenga $\frac{\text{V.P.C.}}{2\pi i}\int_{2-i\,\infty}^{2+i\,\infty} e^{st}F(s)ds = f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$.

   b) Sea $t < 2$, encuentre $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$ usando la fórmula de inversión compleja de Laplace. [Sug. utilice el contorno: $C_{2R} + C_L$].

   c) Verifique el resultado usando tabla y propiedades de Transformada de Laplace.



Ejercicio 4 .Funciones Impulsivas

1. Diga si la siguientes afirmaciones son ciertas y justifique:

   (a) $(1+e^t)\,\delta(t)=1$ (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(1+e^t)\,\delta(t)\,dt=\,2$

   (b) $(t^2+1)\,\delta(t-1)=\,2\delta(t)$ (d) $\cos(t+\pi)\,\delta(t-\pi)=\,1$

2. Sea $f(t)=\cos(t)$ para $0<t<\pi/2,$ y $f(t)=0$ en el resto. Responda los siguientes puntos utilizando función escalón, funciones impulsivas, y propiedades (de las distribuciones):

   a) Escriba a $f(t)$ utilizando función escalón.

   b) Encuentre: $f'(t)$ y $f''(t)$.

   c) Encuentre: $\mathcal{L}\{f(t)\}$, $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ y $\mathcal{L}\{f''(t)\}$

   d) ¿$\mathcal{L}\{f'(t)\}=sF(s)-f(0^+)$?, ó ¿$sF(s)-f(0^-)$?

3. Aplique transformada de Laplace y resuelva: $y'(t)-2\,y(t)=\delta'(t-1),\ -\infty<t<+\infty$.

Ejercicio 5 .Transformada Z.

1. Resolver la siguiente ecuación a diferencia. Es decir se debe encontrar la sucesión y_n para $n\geq 0$, sabiendo que $y_{-1}=2$, $y_{-2}=1$ y que verifica la siguiente ecuación

   $$y_n-5\,y_{n-1}+6\,y_{n-2}=0 \quad \text{para } n\geq 0.$$

   Grafique los primeros 4 valores de la sucesión y_n y compruebe que verifican la ecuación a diferencias.

2. Encuentre todas las posibles sucesiones y_n que verifican para todo n entero la siguiente ecuación a diferencias: $y_n+y_{n-1}=6\,(2)^{-n}\,u_n$

3. Dadas las sucesiones $x_n=u_n-\delta_n$ e $y_n=u_{n-1}$, calcule la convolución de ambas suscesiones usando la definición. Luego compruebe la propiedad de la transformada Zeta de una convolución.

Ejercicio 6 .Ejercicios integradores.

1. Dada la siguiente función de variable compleja: $X(z) = \dfrac{30}{1 - z^{-2}}$

   a) Clasifique todas las singularidades de $X(z)$.

   b) Indique las posibles sucesiones que pueden tener a $X(z)$ como su transformada Z, en cada caso diga también la región de convergencia correspondiente y si verifican la ecuación a diferencias: $x_n + x_{n-2} = 30u_n$.

   c) Sea C el círculo $|z| = 2$, recorrido en sentido antihorario. ¿Cuál es la variación del argumento de $X(z)$ sobre la curva C? y ¿cuál es el valor de $\int_C X(z)dz$?

   d) Muestre que el círculo C se transforma en otro círculo al aplicarle la transformación $w = X(z)$. Calcule su centro y radio. Compare la variación del argumento calculada en el inciso anterior con las vueltas alrededor del origen de la curva imágen.

2. Considere una función f periódica, $T = \pi$, que verifica $f(x) = e^x$, cuando $0 < x \leq \pi$, y la función $g(x) = f(x)[h(x) - h(x - \pi)]$. Conteste los siguientes puntos:

   a) Encuentre $F(s)$, la transformada de Laplace de $f(x)$, analice sus ceros y puntos singulares.

   b) Encuentre $g'(x)$ y $g''(x)$ usando distribuciones y sus respectivas transformadas de Laplace.

   c) Encuentre la serie de Fourier de f con exponenciales complejas, [Recuerde: $f(x) \approx \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}$ con $\gamma_n = \frac{1}{2L} \int\limits_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}dx$], grafique el espectro en frecuencias, indique el orden de decrecimiento de sus coeficientes y calcule las siguientes sumas: $\sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_n$, $\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \gamma_n$ y $\sum_{-\infty}^{+\infty} |\gamma_n|^2$.

3. Sea $f(t) = \frac{1-e^{-t}}{t}$ y $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$:

   a) Muestre que f es de orden exponencial.

   b) Encuentre $F(s)$ cuando $s \in \mathbb{R}$ y su respectiva región de convergencia.

   c) Encuentre una función analítica $F(s)$ sobre todo el semiplano de convergencia, que coincida con la función encontrada en el punto anterior sobre el eje real positivo. ¿Puede elegir al argumento principal: $-\pi/2 \leq Arg(z) < 3\pi/2$?.

4. Investigue y escriba una nota de aplicación donde se usen contenidos de Funciones de Variable Compleja para tratar un problema de ingeniería. Se recomienda el libro: "Matemáticas Avanzadas para Ingeniería" de Glyn James, (cod. Biblioteca Central: **517 J233a2**), como guía para conocer aplicaciones, luego busque otras fuentes y cítelas en la nota. La extensión no debe ser mayor a 4 carillas, siguiendo el formato y estilo provisto por la cátedra.