Funciones de Variable Compleja

Trabajo Práctico N° 1

1. Analizar la convergencia de las siguientes sucesiones:

   (a) $x_n = \frac{n}{2n+1}$ (b) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ (c) $x_n = \frac{3}{5^n}$ (d) $x_n = 4^{n-1}$

2. Encuentre la sucesión de sumas parciales de las siguientes series y analice su convergencia:

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5^n}$

3. Analizar la convergencia y la convergencia absoluta de las siguientes series:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1}$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{2n-1}$

4. Calcule la suma de las series dadas en los ejercicios: 3(a), 2(b) y 2(c).
Describa un algoritmo que permita calcular las sumas parciales de una serie dada. Implemente con calculadora, o usando algún código o lenguaje de programación y observe si las sumas parciales tienden al valor de sus respectivas sumas calculadas previamente.

5. Utilizando la definición correspondiente, analizar la convergencia de las siguientes integrales en función del parámetro k:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^k}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^k}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^k} \qquad \int_0^{\infty} e^{-kx}\,dx$$

6. (a) Analizar la convergencia y la convergencia absoluta de las siguientes integrales:

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx \qquad \int_0^2 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \int_1^{\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x\,dx \qquad \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx \qquad \int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx \qquad \int_0^{\infty} \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}(x^4+1)}dx$$

   (b) Calcular el valor principal de Cauchy de las siguientes integrales:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx$$

   (c) Decir si son ciertas las siguientes afirmaciones:

   I. La integral $\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx$ es divergente porque la integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx$ diverge.

   II. La integral $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3}dx$ es divergente porque $\int_0^1 \frac{1}{x^3}dx$ diverge.

(d) Usando integración por partes, analice la convergencia de $\int_1^{\infty} \frac{sen\, x}{x}\, dx$.

(e) Muestre que $\int_0^{\infty} \frac{sen\, x}{x}\, dx$ converge condicionalmente. [Ayuda en la pag. Web de FVC, menú: Varios, http://lcr.uns.edu.ar/fvc/]

7. Indique si las siguientes series son o no, geométricas o telescópicas. ¿Convergen para $x = 1$? Halle el intervalo de la recta donde convergen absolutamente:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (x^n - x^{n+1})$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} 5\frac{x^{n+1}}{3^{n+1}}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

8. Encuentre y grafique la *función suma de la serie* en los ejercicios 7(a) y 7(b).

9. *Convergencia uniforme*

(a) Utilice el test de Weierstrass para verificar que las series dadas en 7(b) y 7(c) son uniformemente convergentes en el intervalo $[-1/2, 1/2]$.

(b) ¿Podría ampliarse dicho intervalo?

(c) La serie de funciones dada en 7(a), ¿converge uniformemente en [0,1]? (observe la continuidad de la función suma).

Integrales impropias paramétricas

10. Utilizando el test M de Weierstrass, indicar intervalos del parámetro α donde se podría asegurar que las integrales siguientes convergen uniformemente:

(a) $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx$ (b) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx$ (c) $\int_0^{\infty} e^{-x} \cos \alpha x\, dx$

11. Sea $F(s)$ una función definida por medio de una integral impropia paramétrica de la siguiente manera:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt, \qquad s > 0.$$

(a) Sin resolver la integral muestre que $F(s)$ es una función continua y derivable en $[1, +\infty)$, y además verifica:

$$F'(s) = \tfrac{d}{ds}\left(\int_0^{\infty} e^{-st}\, dt\right) = -\int_0^{\infty} e^{-st} t\, dt.$$

(b) Observe que el intervalo podría ampliarse a $[s_0, +\infty)$, con $s_0 > 0$.
(c) Resuleva la integral y compruebe los resultados mostrados en (a) y (b).