Funciones de Variable Compleja

Clase 9, 2 de septiembre de 2019.

Ejercicio 1: Analizar: continuidad, derivabilidad, y analiticidad de las funciones

a) $f(z) = y(x^2 - 1) + i\, x\, y^2$

c) $f(z) = \dfrac{1}{2 + \operatorname{sen} z}$

d) $f(z) = \operatorname{Ln}\left|\dfrac{1+z}{1-z}\right| + i\operatorname{Arg}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) \qquad -\pi < \operatorname{Arg}(z) \le \pi$

e) $f(z) = |z|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\operatorname{Arg}(z)}{2}} \qquad -\pi < \operatorname{Arg}(z) \le \pi$

Observe que a diferencia de las funciones reales el denominador de la función en c) puede anularse. En el caso d), busque los puntos que verifican $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) = \pi$.)

Funciones Multivaluadas

Para resolver la ecuación $e^z = -2$, debería utilizar la función inversa de la exponencial, pero esta no es única!. ¿Hay muchas inversas? A este tipo de funciones las llamamos MULTIVALUADAS, es decir en este caso $z = \log(-2)$, el resultado es un conjunto de infinito valores.

La función $\log(z) = \ln|z| + i\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi i$ es multivaluada. A cada punto z le corresponden infinitos valores complejos distintos.

Si fijamos un Argumento Principal y un valor de k (entero), obtenemos una función univaluda que llamamos "**rama**" de la función multivaluada. Hay infinitas ramas, si se elige $k = 0$, la llamamos rama principal. Todas las ramas de $\log(z)$ son analíticas excepto donde quede la discontinuidad del Argumento elegido. Siempre será una línea que une el origen con el infinito. Esta línea de puntos singulares se denomina "**corte**", y los puntos comunes a todo corte, el origen y el infinito, se llaman "**puntos de ramificación**"

Ejercicio 2: Si $-\pi < \operatorname{Arg}(z) \le \pi$, ¿ $e^{\operatorname{Log}(z)} = z$? ¿ $e^{\log(z)} = z$? ¿ $\log(e^z) = z$? ¿ $\operatorname{Log}(e^z) = z$?:

Ejercicio 3: Consideremos una rama de

$$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\log z} = |z|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}(\operatorname{Arg} z + 2k\pi)} = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\operatorname{Arg} z}{2}} e^{ik\pi} = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\operatorname{Arg} z}{2}} (-1)^k$$

Si $-\pi < \operatorname{Arg}(z) \le \pi$, la rama principal de $\sqrt{z}$, es $f(z) = e^{\frac{1}{2}L\operatorname{og} z} = |z|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\operatorname{Arg} z}{2}}$, el corte se ubica sobre el eje real negativo, en el resto de los puntos es analítica.
¿Cómo obtenemos su derivada?
Podemos derivar aplicando la regla de la cadena:

$$f'(z) = e^{\frac{1}{2}L\operatorname{og} z}\frac{1}{2z} = |z|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\operatorname{Arg} z}{2}} \frac{1}{2|z|e^{i\operatorname{Arg} z}} = \frac{1}{2|z|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\operatorname{Arg} z}{2}}} = \frac{1}{2f(z)}$$

Es decir vale la regla $\dfrac{d}{dz}\left(\sqrt{z}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{z}}$, donde $\sqrt{z}$ indica la misma rama de la función y en la derivada)

Ejercicio 4: Sea $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ una función de variable compleja definida en un entorno ε de z_0. Si $\exists\, f'(z_0)$ calcule los siguientes límites y compare:

$$¿ \lim_{\substack{\Delta y = 0 \\ \Delta x \to 0}} \mathrm{Re}\left[\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}\right] = \lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y \to 0}} \mathrm{Re}\left[\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}\right] ?$$

$$¿ \lim_{\substack{\Delta y = 0 \\ \Delta x \to 0}} \mathrm{Im}\left[\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}\right] = \lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y \to 0}} \mathrm{Im}\left[\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}\right] ?$$

b) ¿ $f(z)$ verifica las ecuaciones de Cauchy Riemann en z_0?

c) ¿ $f(z)$ es analítica en z_0?