

Funciones de Variable Compleja

Clase 7, 28 de agosto de 2018.

Ejercicio 1: Analice la continuidad y derivabilidad de las funciones:

$$f(z) = \bar{z}, \quad f(z) = e^z, \quad f(z) = e^{z^2}, \quad f(z) = \frac{1}{z^2}, \quad f(z) = z^2, \quad f(z) = |z|^2,$$

¿Si es continua es derivable? ¿si es derivable es continua? ¿si u y v son derivables, f es derivable?

- **Continuidad.** Teoremas 19 y 20

Ejercicio 3: Funciones analíticas (holomorfas) Lea las definiciones 38, 39 y 40, el Teorema 24 y las propiedades de funciones analíticas. Luego responda:

- Si una función $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ es continua en un punto, ¿es también derivable en ese punto? ¿si es derivable es continua? ¿si u y v son derivables, f es derivable?
- Las funciones de ejercicios previos ¿son analíticas? ¿tienen puntos singulares?

$$f(z) = e^z, \quad f(z) = e^{z^2}, \quad f(z) = \bar{z}, \quad f(z) = \frac{1}{z^2}, \quad f(z) = z^2, \quad f(z) = |z|^2.$$

Ejercicio 3: Funciones armónicas. Teoremas 25 y 26. ¿Puede ser $u(x, y) = xy$ la parte real de una función analítica? ¿y $u(x, y) = x^2 y$? En caso afirmativo, ¿cómo tiene que ser $v(x, y)$ para que $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ sea analítica?

Ejercicio 4: Funciones elementales . Observe cómo se extienden al plano complejo las funciones (pag 23 y 24) trigonométricas: $\sin(z)$ y $\cos(z)$ y las hiperbólicas: $\sinh(z)$ y $\cosh(z)$.

Muestre que la derivada de $\sin(z)$ es $\cos(z)$ y que son analíticas en todo el plano (enteras).

Ejercicio 5: Estudie para qué valores de z es analítica la función $f(z) = \tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$

$$\text{Sol.: } z \neq i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

Ejercicio 6: Calcule, si existe: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2(1+y) + y^2}{x^2 + y^2}$ (probar con direccionales y polares)

Puede usar que:

si $|f(re^{i\theta}) - w_0| \leq g(r)$ y $\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0$, entonces $\lim_{z \rightarrow 0} f(re^{i\theta}) = w_0$ uniformemente en θ .

(uniforme en θ significa que además que w_0 no depende de θ , en la definición de límite, δ tampoco depende de θ).