Funciones de Variable Compleja

Clase 6, 26 de agosto de 2019

Ejercicio1: ¿Dónde es continua $f(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$? con $-\pi < \mathrm{Arg}(z) \le \pi$.

Ejercicio 2: Calcule si existen los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{z}$ b. $\lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}$ c. $\lim\limits_{z\to \infty} e^{\frac{1}{z}}$ d. $\lim\limits_{z\to \infty} e^{z}$

Presentación del Infinito: Límites y punto del Infinito, esfera de Riemann. Def. 34:

Es un punto o elemento que no está en el plano complejo, nos acercamos a infinito o estamos en su entorno, si el módulo es lo suficientemente grande y por cualquier dirección o argumento (no se habla ni de +∞ ni de -∞, como en el caso real, pues hay una infinidad de direcciones por donde acercarse a ∞).

Equivalencias entre límites infinitos y finitos:

- $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$
- $\lim\limits_{z\to \infty} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to 0} f(\tfrac{1}{z}) = w_0$
- $\lim\limits_{z\to \infty} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{f(\frac{1}{z})} = 0$

Además $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} \frac{1}{|f(z)|} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$

Ejercicio 3: Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{z^2 - z_0{}^2}{z - z_0}$$ (¿Este límite es una derivada?)

- **Derivadas**:
  - Definición 37 (ver ejercicio 2, la derivada por definición de $f(z) = z^2$)
  - Fórmulas de derivación (derivación por reglas, ejemplo $f(z) = z^2$)

Ejercicio3: ¿Puede derivar usando las reglas ya conocidas en las siguientes funciones?

$$f(z) = 3i + (1-i)z^3\ , \quad f(z) = \frac{1}{z^2}, \quad f(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z), \text{ con } -\pi < \mathrm{Arg}(z) \le \pi .$$

- **Ecuaciones de Cauchy-Riemann**: Relaciones entre la derivada con respecto a *z*, y las derivadas con respecto a *x* e *y*.
  - **Teorema 21** (condición necesaria para existencia de derivada compleja)
  - **Teorema 22** (condición suficiente para existencia de derivada compleja)
  - **Teorema 23** (condición necesaria y suficiente para existencia de derivada compleja)

Ejercicio 4: Aplicar los teoremas 21 y 22 en los ejemplos de las funciones $f(z) = z^2$ y $f(z) = |z|^2$. Comparar con los resultados hallados por definición.

¿Si es continua es derivable?¿si es derivable es continua?¿si *u* y *v* son derivables, *f* es derivable?

- **Un poco de Lógica matemática… para usar y demostrar los Teoremas: Condiciones Necesarias y Suficientes-Condición Necesaria-Condición Suficiente**

Ejercicio 5: Cuando sea posible y resulte una afirmación verdadera, completar con A y B según las proposiciones dadas:

…… $\Rightarrow$…… …… si sólo si ……

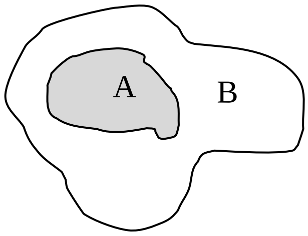
…… $\Leftrightarrow$…… …… siempre que ……

Si …… entonces …… Todo ….. verifica …..

Si ……, …… ….. es una condición necesaria para …..

…… si …… ….. es una condición suficiente para …..

…… sólo si …… ….. es una condición necesaria y suficiente para …..



	caso 1	*caso 2*	*caso 3*
Proposición A:	llueve	*f* es una función derivable	*f* es continua en z_0
Proposición B:	la calle se moja	*f* es una función continua	$f(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$

Dada la implicación A $\Rightarrow$ B, que llamamos directa, existen implicaciones asociadas:

- la **implicación recíproca** B $\Rightarrow$ A.
- la **implicación contrarrecíproca** ~B $\Rightarrow$ ~A.

Función Logaritmo

e^z es una función periódica con periodo $T=2\pi i$. $e^{z+2\pi i}=e^z$, ¿la función inversa de la exponencial es única?

Encuentre todos los valores de *w* tales que: $e^W=z$, el conjunto de todos los valores de w se llama :

Logaritmo General: $\log z=\{w=\ln|z|+i\,\mathrm{Arg}(z)+i2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

Es una función multivaluada.

El Logaritmo Principal: $w=\mathrm{Log}\,z=\ln|z|+i\,\mathrm{Arg}(z)$, es una rama o función univaluada de log(z).

Calcule: $\log(1)=$ $\mathrm{Log}(1)=$

La función $\log(z)=\ln|z|+i\,\mathrm{Arg}(z)+2k\pi i$ es multivaluada. A cada punto *z* le corresponden infinitos valores complejos distintos.

Si fijamos un Argumento Principal y un valor de *k* (entero), obtenemos una función univaluda que llamamos determinación o "**rama**" de la función multivaluada. Hay infinitas ramas, si se elige $k=0$, la llamamos rama principal. Todas las ramas de $\log(z)$ son continuas excepto donde quede la discontinuidad del Argumento elegido, que siempre será una línea que une el origen con el infinito.