Funciones de Variable Compleja

Clase 5, 23 de agosto de 2019

Ejercicio1: Calcule todos los valores de z en el plano complejo que verifiquen:

a. $e^z = 1$ b. $e^z = 0$ c. $e^z = -1$

Límites. Definición. 33

Ejercicio 2: Mostrar por definición que $\lim_{z\to i} 2iz = -2$. Para entender mejor el concepto de límite, fije $\varepsilon = 0.1$, encuentre δ en función de ese ε y realice un gráfico con los entornos interpretando la definición de límite. Luego generalice para cualquier ε dado. Observe que $\left|2iz-(-2)\right| = \left|2i(z-i)\right| = \left|2i\right|\left|(z-i)\right| = 2\left|(z-i)\right|$

- **Teoremas 17, 18 y 19**.

Continuidad. Definición 35 y 36. Continuidad de polinomios y función exponencial.

$$\lim_{z\to z_0} a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = a_0 + a_1 z_0 + a_2 {z_0}^2 + \cdots + a_n {z_0}^n$$

$$\lim_{z\to z_0} e^z = e^{z_0}$$

Utilizar continuidad de polinomios para probar que $\lim_{z\to 1} 2iz = 2i$

Ejercicio 3: Calcule los siguientes límites usando teoremas 17, 18, 19 y propiedades

a. $\lim_{z\to i} e^z =$ b. $\lim_{z\to 1} \frac{\overline{z}}{z}$ c. $\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z}$ d. $\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}^2}{z}$

e. $\lim_{z\to i} \left|e^z\right| =$ f. $\lim_{z\to 1} \left|\frac{\overline{z}}{z}\right|$ g. $\lim_{z\to 0} \left|\frac{\overline{z}}{z}\right|$ h. $\lim_{z\to 0} \left|\frac{\overline{z}^2}{z}\right|$

- Propiedades (pag. 15). Observe propiedades 1, 2 y 3 en el ejercicio anterior.
- Límites direccionales (recordar que pueden utilizarse para probar que no existe algún límite particular).
- En coordenadas polares, cuando se calcula un límite tendiendo al origen: $z \to 0$, sólo $r \to 0$ y θ actúa como parámetro. Hay que recordar y tener en cuenta que tanto el resultado del límite como su convergencia deben ser independientes del ángulo (uniformemente en θ) para poder asegurar la existencia del límite complejo.

Propiedades de funciones continuas:

- Suma, producto, cociente, y composición de funciones continuas.
- Si una función es continua en un punto y no se anula allí, entonces existe un entorno donde no se anula.
- Si una función es continua en una región cerrada y acotada, entonces dicha función es acotada y el módulo de la función alcanza su máximo en esa región.