Funciones de Variable Compleja

Clase 40, 29 de noviembre de 2019

Ejercicio 1: Considere las distribuciones: $\delta\left[\phi(x)\right]=\phi(0)$ y $T_f\left[\phi(x)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx$

Sea $\phi(x)=\begin{cases}2 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$, y la función escalón $h(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$, evalúe:

a) $\delta\left[\phi(x)\right]=$

b) $T_h\left[\phi(x)\right]=$

c) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-1)\phi(x)dx=$

Ejercicio 2:

a) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s-1}{s+1}\right)_{(t)}=$ b) $\mathcal{L}\left(\delta(t-1)\right)_{(s)}=$

Transformada Zeta Unilátera

- **Definición**:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{U}}\left(x_n\right)=X(z)=\sum_{0}^{\infty}x_n z^{-n},$$

es una serie de potencias negativas. Por lo tanto $X(z)$ es una función analítica en el exterior de un círculo centrado en el origen.

Si x_n es ***causal*** (es decir se anula para los n negativos) la transformada zeta unilátera y bilátera coinciden.

- La propiedad de traslación para $k>0$

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{U}}\left(x_{n-k}\right)=z^{-k}X(z)+x_{-1}z^{-k+1}+\cdots+x_{-k+1}z^{-1}+x_{-k}$$

- **Resolución de ecuaciones a diferencias:**

En forma similar a la aplicación de Transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferencial, con transformada Zeta podemos resolver ecuaciones “a diferencias”.

Lo aplicaremos a ecuaciones o un sistema de ecuaciones donde la incógnita es una sucesión o un conjunto de sucesiones. Son ecuaciones lineales, con coeficientes constantes, donde aparecen sucesiones y corrimientos de sucesiones.

Estas ecuaciones a diferencias pueden aparecer en problemas donde se han “discretizado” ecuaciones diferenciales, aproximando las derivadas con los incrementos o “diferencias”. Como cuando se convierten modelos analógicos en modelos digitales. También aparecen en aplicaciones que son netamente discretas.

Ejemplo: Encuentre la sucesión y_n que verifique:

$$y_{-1} = -1$$

$$y_n - \frac{1}{2} y_{n-1} = 1 \qquad n \geq 0$$

se puede resolver recursivamente: $y_n = 1 + \frac{1}{2} y_{n-1}$, luego

$$y_0 = \frac{1}{2}, \quad y_1 = \frac{5}{4}, \quad y_2 = \frac{13}{8}, \quad \cdots$$

Esta ecuación también se puede resolver en forma cerrada usando transformada Zeta. Como tiene condición inicial se resuelve con transformada Zeta unilátera, pues vale para $n \geq 0$.

- Recordar la propiedad de traslación para $k > 0$

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{U}}(x_{n-k}) = z^{-k} X(z) + x_{-1} z^{-k+1} + \cdots + x_{-k+1} z^{-1} + x_{-k}$$

por ejemplo $\mathcal{Z}_{\mathcal{U}}(x_{n-1}) = z^{-1} X(z) + x_{-1}$.

Luego,

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{U}}\left(y_n - \frac{1}{2} y_{n-1}\right) = \mathcal{Z}_{\mathcal{U}}(1)$$

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{U}}(y_n) - \frac{1}{2}\mathcal{Z}_{\mathcal{U}}(y_{n-1}) = \mathcal{Z}_{\mathcal{U}}(u_n)$$

$$Y(z) - \frac{1}{2}\left[z^{-1} Y(z) + y_{-1}\right] = \frac{1}{1 - z^{-1}} \qquad |z| > 1$$

$$Y(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)} - \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}\left(1 - z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)} = \frac{\frac{1}{2} z (z+1)}{\left(z - \frac{1}{2}\right)(z-1)}$$

para resolver utilizando la tabla, conviene realizar el siguiente paso:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{\frac{1}{2}(z+1)}{\left(z - \frac{1}{2}\right)(z-1)} = \frac{A}{z - \frac{1}{2}} + \frac{B}{z-1}$$

$$= \frac{-\frac{3}{2}}{z - \frac{1}{2}} + \frac{2}{z-1}$$

$$Y(z) = -\frac{3}{2}\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{2z}{z-1}$$

$$= \frac{-\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1-z^{-1}}$$

luego por tabla, para $|z| > 1$ y $n \geq 0$

$$y_n = \mathcal{Z}_u^{-1}(Y(z)) = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u_n + 2u_n$$

$$= \left(2 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)u_n$$

(observar que este resultado es directo y no recursivo como el anterior)

<u>Ejercicio</u>: **Transformada Zeta.** Sea $X(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}} = \dfrac{z}{z-1}$ si $z \neq 0$.

Puede antitransformarse con una “división larga”

$$\begin{array}{l|l}
z & z-1 \\ \cline{2-2}
-(z-1) & 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots \\ \cline{1-1}
\quad 1 & \\
\quad -(1-z^{-1}) & \\ \cline{1-1}
\qquad z^{-1} & \\
\qquad -(z^{-1}-z^{-2}) & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad z^{-2} & \\
\qquad\qquad \vdots &
\end{array} \qquad |z| > 1$$

Ordenando los coeficientes en sentido inverso:

$$\begin{array}{l|l}
z & -1 + z \\ \cline{2-2}
-(z-z^2) & -z - z^2 - z^3 - z^4 + \cdots \\ \cline{1-1}
\quad z^2 & \\
\quad -(z^2-z^3) & \\ \cline{1-1}
\qquad z^3 & \\
\qquad -(z^3-z^4) & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad z^4 & \\
\qquad\qquad \vdots &
\end{array} \qquad |z| < 1$$

De esta forma podemos antitransformar: $Y(z) = \dfrac{\frac{1}{2}z(z+1)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-1)} = \dfrac{\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z}{z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}}$

$$\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}z \quad \Big| \quad z^2-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}$$

$$-\left(\frac{1}{2}z^2-\frac{3}{4}z+\frac{1}{4}\right) \qquad \frac{1}{2}+\frac{5}{4}z^{-1}+\frac{13}{8}z^{-2}+\frac{29}{16}z^{-3}+\cdots$$

$$\frac{5}{4}z-\frac{1}{4}$$

$$-\left(\frac{5}{4}z-\frac{15}{8}+\frac{5}{8}z^{-1}\right)$$

$$\frac{13}{8}-\frac{5}{8}z^{-1}$$

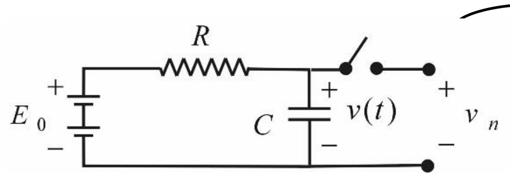
$$-\left(\frac{13}{8}-\frac{39}{16}z^{-1}+\frac{13}{16}z^{-2}\right)$$

$$\frac{29}{16}z^{-1}-\frac{13}{16}z^{-2}$$

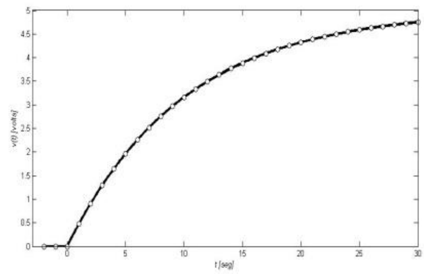
$$\vdots$$

Ejemplo: Circuito muestreado

(muestreo en intervalos uniformes T)

de 

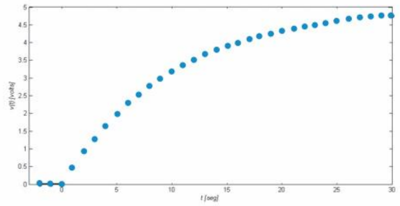
Usando transformada Laplace se obtuvo que:



$$v(t)=E_0(1-e^{-\frac{1}{RC}t})h(t)$$

Para $RC=10\text{seg}$, $E_0=5\text{volts}$ y $T=1\text{seg}$, encuentre:

a) La sucesión de valores: v_0, v_1, v_2, v_3, … .



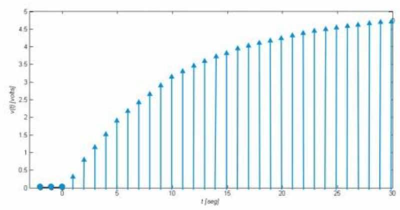
$$v_n=v(nT)=E_0(1-e^{-\frac{1}{RC}nT})=5(1-e^{-0.1n})$$

$\{0 \quad 0.4758 \quad 0.9063 \quad 1.2959 \quad 1.6484 \ldots\}$

b) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)v(t)\,dt=\delta_{(t-nT)}\left[v(t)\right]=v(nT)=v_n=E_0(1-e^{-\frac{1}{RC}nT})=5(1-e^{-0.1n})$$

c) $$v(t)\delta(t-nT)=v(nT)\delta(t-nT)=E_0(1-e^{-\frac{1}{RC}nT})\delta(t-nT)=5(1-e^{-0.1n})\delta(t-nT)$$

d) Sumatoria de impulsos $v(t)^*=\sum v(t)\delta(t-nT)=\sum v_n\delta(t-nT)$



e) $$V(S)=\mathcal{L}\left(v(t)\right)=\frac{E_0}{s}-\frac{E_0}{s+\frac{1}{RC}}=\frac{5}{s}-\frac{5}{s+0.1}$$

f) $$V(z)=\mathcal{Z}\left(v_n\right)=E_0\frac{1}{1-z^{-1}}-E_0\frac{1}{1-e^{-\frac{T}{RC}}z^{-1}}=\frac{5}{1-z^{-1}}-\frac{5}{1-e^{-0.1}z^{-1}}$$

Los polos de $V(s)$ y de $V(z)$ están relacionados por la transformación Exponencial: $z=e^{ST}$

Teorema del Valor Final en Transformada de Laplace

$\lim_{t\to\infty} v(t)=$ $\lim_{s\to 0} sV(s)=$

Teorema del Valor Final en Transformada Zeta

$\lim_{n\to\infty} v_n=$ $\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})V(z)=$

Siempre que los polos de $(1-z^{-1})V(z)$ estén dentro del círculo unitario: $\lim_{n\to\infty} v_n=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})V(z)$