Funciones de Variable Compleja

Clase 39, 27 de noviembre de 2019.

Ejercicio 1: Sea: $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\le 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$, encuentre su transformada de Fourier, y exprese a f como una integral de Fourier y grafique su espectro en frecuencias

Ejercicio 2: Sea $g(x)=\begin{cases}10 & |x-3|\le 1\\ 0 & |x-3|>1\end{cases}$, y $h(x)$ la función escalón. (observe que $g(x)=10f(x-3)$)

Encuentre, si existen, las siguientes transformadas (use definición, el resultado del ejercicio 1 y propiedades):

$\Phi\left(g(x)\right)_{(w)}=$ $\qquad\qquad$ $\Phi\left(h(x)\right)_{(w)}=$

$$\Phi\left(e^{-x}h(x)\right)_{(w)}=\frac{1}{2\pi}\mathcal{L}\left(e^{-x}\right)_{(s=iw)}=\frac{1}{2\pi(iw+1)}$$

$$\Phi\left(e^{-ix}f(x)\right)_{(w)}=$$

$$\Phi\left(e^{2ix}f(x+3)\right)_{(w)}=$$

Series de Fourier como espacios vectoriales

Recordemos que una serie de Fourier, se puede pensar como un espacio vectorial, donde a la señal se la describe a través de una base, donde cada componente corresponde a una frecuencia. Pero la base puede estar formada por otros vectores (funciones) como por ejemplo polinomios

Por ejemplo, consideremos el intervalo $[0,1]$ y el conjunto $\{a_0, b_0+b_1x\}$. Este conjunto tiene dos vectores, los cuales son funciones definidas en ese intervalo, donde el primer vector corresponde a frecuencia cero y el segundo a frecuencia angular 1. Dicho conjunto:

a) Encuentre los coeficientes a_0, b_0 y b_1 para que sean ortonormales en $[0,1]$

b) Si queremos aproximar x^2 el intervalo $[0,1]$, mediante la combinación $\alpha_1.(a_0),+\alpha_2.(b_0+b_1x)$, ¿cómo debemos elegir los coeficientes α_1 y α_2 para que el error medio cuadrático sea mínimo?

Generalizando, si queremos aproximar una función $f(x)$ con una combinación lineal de los vectores de un conjunto ortonormal $\{\phi_n(x)\}$, es decir la aproximación es $S(x)=\sum\alpha_n\phi_n(x)$, ¿cómo elegimos los coeficientes para que el error sea mínimo?

Definamos el vector error $e(x)=S(x)-f(x)$, y tratemos que se mínima su norma $\|e(x)\|=\sqrt{\langle e(x),e(x)\rangle}$

$$\|e(x)\|^2=\int_a^a\left(S(x)-f(x)\right)^2dx=\langle S(x)-f(x),S(x)-f(x)\rangle=\langle\sum\alpha_n\phi_n(x)-f(x),\sum\alpha_n\phi_n(x)-f(x)\rangle$$

$$=\langle f(x),f(x)\rangle-\sum 2\alpha_n\langle\phi_n(x),f(x)\rangle+\sum_{n\neq m}2\alpha_n\alpha_m\langle\phi_n(x),\phi_m(x)\rangle+\sum\alpha_n{}^2\langle\phi_n(x),\phi_m(x)\rangle$$

$$=\|f(x)\|^2-\sum 2\alpha_n\langle\phi_n(x),f(x)\rangle+\sum\alpha_n{}^2$$

Completando cuadrados:

$\|e(x)\|^2 = \| f(x)\|^2 + \sum(\alpha_n - \langle \phi_n(x), f(x)\rangle)^2 - \sum\langle \phi_n(x), f(x)\rangle^2$

De donde se observa que el error es mínimo cuando $\alpha_n = \langle \phi_n(x), f(x)\rangle = c_n$, los coeficientes son los de Fourier, $\|e(x)\|^2 = \| f(x)\|^2 - \sum c_n{}^2$. Es decir las sumas parciales de una serie de Fourier son las mejores aproximaciones, en el sentido de minimizar la integral $\int_a^a \left(S(x) - f(x)\right)^2 dx = \int_a^a \left(\sum \alpha_n \phi_n(x) - f(x)\right)^2 dx$, minimiza el error medio cuadrático. Si volvemos al ejercicio planteado, usando las fórmulas para los dos primeros términos del desarrollo de Fourier, es la mejor aproximación de x^2 en el intervalo $[0,1]$.

Si el error tiende a cero cuando *n* tiende intinito

$\lim_{n\to\infty} \|e(x)\|^2 = 0 = \| f(x)\|^2 - \sum^{\infty} c_n{}^2$, se obtiene la identidad de Parseval:

$\int_a^b f(x)dx = \| f(x)\|^2 = \sum^{\infty} c_n{}^2$

<u>Ejercicio 3</u>:

a) Muestre que si *f* tiene un cero de orden *m* en z_0, entonces $\frac{f'(z)}{f(z)}$ tiene un polo simple en z_0, calcule su residuo

b) Muestre que si *f* tiene un polo de orden *m* en z_0, entonces $\frac{f'(z)}{f(z)}$ tiene un polo simple en z_0, calcule su residuo

<u>Ejercicio 4</u> (pag.74, ej.35.1) Demostración del Teorema 69 (Principio de Variación del Argumento): Sea *f* una función analítica sobre y dentro de una curva cerrada simple *C*, excepto en un número finito de polos interiores a *C*. Suponga además que *f* no tiene ceros sobre *C* (pero sí pueden haber ceros en el interior de *C*)

a) Muestre, usando parametrización (genérica) que :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z)$$

<u>Solución</u>: Dada la curva simple C, consideremos su parametrización:

$$C : z(t) = x(t) + i\, y(t) \quad a \le t \le b,$$
$$z'(t) = x'(t) + i\, y'(t)$$

Por lo tanto reemplazando en la integral:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f'(z(t))}{f(z(t))} z'(t)dt$$

Una parametrización de la curva imagen (que ya puede no ser simple) será:

$$w(t) = f(z(t)) \quad a \le t \le b,$$
$$w'(t) = f'(z(t))z'(t)$$

Y sea $\phi(t)$, el argumento de $w(t)$, medido en forma continua sobre todo el intervalo $[a,b]$, considerando todas las vueltas necesarias. Por lo tanto:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f'(z(t))}{f(z(t))} z'(t)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{w'(t)}{w(t)} dt = \frac{1}{2\pi i}\Big[\ln|w(t)| + i\phi(t)\Big]\Big|_a^b = \frac{\phi(b)-\phi(a)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z)$$ Pues:

$|w(a)| = |w(b)|$

b) Siga los siguiente pasos para resolver por residuos la integral $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$

- Encuentre todos los puntos singulares de $\frac{f'(z)}{f(z)}$ dentro de la curva C
- Aplique el teorema de los residuos, el ejercicio 5 y muestre que $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P$

  Por lo tanto se ha demostrado que: $\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z) = Z - P$

<u>Ejercicio 1</u>: Grafique la función $f_n(x) = n\left[h(x) - h(x - \frac{1}{n})\right]$ para $n = 1,\ 2, 3$

Luego evalúe:

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) =$ $\qquad\qquad$ $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx =$

Funciones Impulsivas

• Función delta de Dirac (3 definiciones)

1. Usando *propiedades* necesarias: $\delta(x) = 0$, $\forall x \ne 0$ y $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$.

   ¿existe alguna función que cumpla esto?

2. Planteo como *límite de sucesiones*

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

   donde: $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx = 1$ y $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \ne 0$;

   por ejemplo usando la función escalón $f_n(x) = n\left[h(x) - h(x - \frac{1}{n})\right]$

3. *Distribuciones*

$$\delta\left[\phi(x)\right] = \phi(0).$$

Se suele escribir como una integral: $\delta[\phi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\phi(x)dx = \phi(0)$, porque cumple con muchas propiedades de integrales pero no es una integral, pues a una función *f* se le puede asociar la distribución T_f considerando la integral: $T_f[\phi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx$, siempre que resulte convergente.

Ejercicio 2: Considere las distribuciones: $\delta[\phi(x)] = \phi(0)$ y $T_f[\phi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx$

Sea $\phi(x) = \begin{cases} 2 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$, y la función escalón $h(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$, evalúe:

a) $\delta[\phi(x)] =$

b) $T_h[\phi(x)] =$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-1)\phi(x)dx =$

Ejercicio 3: Calcule: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\delta(t)dt = e^{-0s} = 1$

Ejercicio 4: Grafique el espectro en frecuencias de $\delta(x)$. [sug. encuentre su transformada de Fourier]

$\Phi(\delta(x))_{(w)} = \frac{1}{2\pi}$, el espectro en frecuencia de un impulso es constante para todas las frecuencias.

- Propiedades de funciones impulsivas:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\phi(x)dx = \phi(x_0)$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)\phi(x)dx = -\phi'(0)$

3. $\frac{d(h(x))}{dx} = \delta(x)$

4. $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$

- **Funciones derivables a tramos**: sea $f(x) = (x+2)h(x)$

Si derivamos con la definición ordinaria de derivadas:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \text{no existe} & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = h(x)$$

Si tenemos en cuenta el sentido de las distribuciones:

$$f'(x) = h(x) + (x+2)\delta(x) = h(x) + (2)\delta(x)$$
$$= h(x) + 2\delta(x)$$

Al derivar no se pierde la información del salto en $x = 0$

Extendiendo la definición de Transformada de Laplace a las distribuciones:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} h(t) f(t)dt = T_{h.f}\left[e^{-st}\right]$$

es decir $\mathcal{L}\left(T_f\right)_{(s)} = T_f\left[e^{-st}\right]$

$\mathcal{L}\left(\delta(t)\right)_{(s)} = \delta\left[e^{-st}\right] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\delta(t)dt = e^{-0s} = 1$ observar que no tiende a cero cuando $s \to \infty$ (observar la nueva tabla de propiedades y transformadas en la guía, pag. 94)

$$\Phi\left(\delta(x)\right)_{(w)} = \frac{1}{2\pi}$$

El espectro en frecuencia de un impulso es constante para todas las frecuencias.

¿Cuál sería la Transformada de Laplace de $f'(x)$? Derivando como función ordinaria o en el sentido de las distribuciones? ¿ $sF(s)$? ¿ $sF(s) - f(0^+)$?¿ $sF(s) - f(0^-)$?

<u>Ejercicio 3</u>:

a) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{s+1}\right)_{(t)} =$

b) $\mathcal{L}\left(\delta(t-1)\right)_{(s)} =$

c) $\mathcal{L}\left(h(t-1)\right)_{(s)} =$

d) $\mathcal{L}\left(t\,h(t-1)\right)_{(s)} =$

e) $\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}\left(t\,h(t-1)\right)\right)_{(s)} =$

derivando como función ordinaria

f) $\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}\left(t\,h(t-1)\right)\right)_{(s)} =$

derivando como distribución

g) ¿$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}\left(t\,h(t-1)\right)\right)_{(s)} = s\mathcal{L}\left(t\,h(t-1)\right)$?

<u>Ejercicio 4</u>: Encuentre la región de convergencia y su función suma:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} -a^{-n} z^n$

d) $\sum_{-\infty}^{-1} -a^n z^{-n}$

Transformada Zeta

- **Definición**:

$$\mathcal{Z}(x_n) = X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} \ ,$$

es una serie de potencias. Por lo tanto $X(z)$ es una función analítica en una región anular centrada en el origen (forma de anillo). El radio menor puede ser cero y el radio mayor pude ser infinito.

- **Sucesiones típicas**

a) Impulso: $\delta_n = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$

b) Escalón: $u_n = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$

- **<u>Ejercicio 5</u>**: usar la definición (recordar sumas geométricas)

$\mathcal{Z}(\delta_n) =$ $\mathcal{Z}(u_n) =$

- **<u>Ejercicio 6</u>**: usar la definición (recordar sumas geométricas)

$\mathcal{Z}\left(3^n u_n\right) =$ $\mathcal{Z}^{-1}\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right) =$

Recordar definición: $\mathcal{Z}(x_n) = X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}$, y región de convergencia

- **Algunas Propiedades**:

1. Linealidad $\mathcal{Z}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha X(z) + \beta Y(z)$
2. Traslación $\mathcal{Z}(x_{n-k}) = z^{-k} X(z)$

Transformada Zeta Unilátera

- **Definición**:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{U}}(x_n) = X(z) = \sum_{0}^{\infty} x_n z^{-n} \ ,$$

es una serie de potencias negativas. Por lo tanto $X(z)$ es una función analítica en el exterior de un círculo centrado en el origen.

Si x_n es ***causal*** (es decir se anula para los n negativos) la transformada zeta unilátera y bilátera coinciden.

- La propiedad de traslación para $k > 0$

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{U}}(x_{n-k}) = z^{-k} X(z) + x_{-1} z^{-k+1} + \cdots + x_{-k+1} z^{-1} + x_{-k}$$