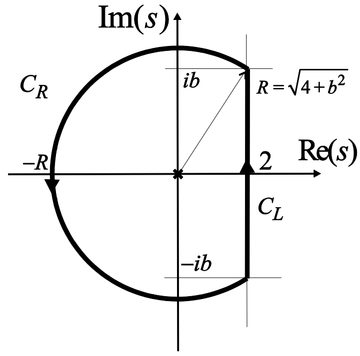
# Funciones de Variable Compleja

**Clase 38, 25 de noviembre de 2019.**




__Ejercicio 1:__ Sea $F(s)=\dfrac{1}{s^2}$, para $s\neq 0$ y considere la curva cerrada mostrada en el gráfico ( es la unión de $C_R$, que es una porción de círculo y $C_L$ un segmento vertical). Calcule por residuos la integral: $\int\limits_{C_R+C_L} F(s)e^{st}ds$

Al final de la clase veremos cómo se relaciona esta integral con Laplace y Fourier.

**Series de Fourier como espacios vectoriales**

Recordemos que una serie de Fourier, se puede pensar como un espacio vectorial, donde a la señal se la describe a través de una base, donde cada componente corresponde a una frecuencia. Pero la base puede estar formada por otros vectores (funciones) como por ejemplo polinomios

Por ejemplo, consideremos el intervalo $[0,1]$ y el conjunto $\{a_0, b_0+b_1x\}$. Este conjunto tiene dos vectores, los cuales son funciones definidas en ese intervalo, donde el primer vector corresponde a frecuencia cero y el segunmdo a frecuencia angular 1. Dicho conjunto:

a) Encuentre los coeficientes $a_0, b_0$ y $b_1$ para que sean ortonormales en $[0,1]$

b) Si queremos aproximar $x^2$ el intervalo $[0,1]$, mediante la combinación $\alpha_1.(a_0),+\alpha_2.(b_0+b_1x)$, ¿cómo debemos elegir los coeficientes $\alpha_1$ y $\alpha_2$ para que el error medio cuadrático sea mínimo?

Generalizando, si queremos aproximar una función $f(x)$ con una combinación lineal de los vectores de un conjunto ortonormal $\{\phi_n(x)\}$, es decir la aproximación es $S(x)=\sum\alpha_n\phi_n(x)$, ¿cómo elegimos los coeficientes para que el error sea mínimo?
Definamos el vector error $e(x)=S(x)-f(x)$, y tratemos que se mínima su norma $\|e(x)\|=\sqrt{\langle e(x),e(x)\rangle}$

$$\|e(x)\|^2=\int_a^a (S(x)-f(x))^2\,dx=\langle S(x)-f(x),S(x)-f(x)\rangle=\langle\sum\alpha_n\phi_n(x)-f(x),\sum\alpha_n\phi_n(x)-f(x)\rangle$$
$$=\langle f(x),f(x)\rangle-\sum 2\alpha_n\langle\phi_n(x),f(x)\rangle+\sum_{n\neq m}2\alpha_n\alpha_m\langle\phi_n(x),\phi_m(x)\rangle+\sum\alpha_n{}^2\langle\phi_n(x),\phi_m(x)\rangle$$
$$=\|f(x)\|^2-\sum 2\alpha_n\langle\phi_n(x),f(x)\rangle+\sum\alpha_n{}^2$$

Completando cuadrados:
$$\|e(x)\|^2=\|f(x)\|^2+\sum(\alpha_n-\langle\phi_n(x),f(x)\rangle)^2-\sum\langle\phi_n(x),f(x)\rangle^2$$

De donde se observa que el error es mínimo cuando $\alpha_n=\langle\phi_n(x),f(x)\rangle=c_n$, los coeficientes son los de Fourier, $\|e(x)\|^2=\|f(x)\|^2-\sum c_n{}^2$. Es decir las sumas parciales de una serie de Fourier son las mejores aproximaciones, en el sentido de minimizar la integral $\int_a^a (S(x)-f(x))^2\,dx=\int_a^a(\sum\alpha_n\phi_n(x)-f(x))^2\,dx$, minimiza el error medio cuadrático. Si volvemos al ejercicio planteado, usando las fórmulas para los dos primeros términos del desarrollo de Fourier, es la mejor aproximación de $x^2$ en el intervalo $[0,1]$.

Si el error tiende a cero cuando *n* tiende intinito

$\lim_{n\to\infty}\|e(x)\|^2 = 0 = \| f(x)\|^2 - \sum^{\infty} {c_n}^2$ , se obtiene la identidad de Parseval:

$\int_a^b f(x)dx = \| f(x)\|^2 = \sum^{\infty} {c_n}^2$

**Series de Fourier como transformadas**

• La serie de Fourier $f(x) \approx \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}$ se puede pensar como una transformada

$$\gamma_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}dx$$

donde a cada función periódica $f(x)$ se le hace corresponder la sucesión $\gamma_n$

**Fourier**

Cuando una función es periódica se puede representar, mediante su serie de Fourier $f(x) \approx \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}$ , también se puede pensar como una transformada

$$\gamma_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}dx$$

donde a cada función periódica $f(x)$ se le hace corresponder la sucesión $\gamma_n$

Si la función no es periódica, en lugar de la serie, se puede utilizar la integral de Fourier. Ver gráficos de la página 83 de la guía y el Teorema 71

$$f(x) \approx \text{V.P.C.} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(w)e^{iwx}dw \qquad \mathcal{F}(w) = \Phi\left( f(x)\right)_{(w)}$$

$$\mathcal{F}(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx$$

<u>**Ejercicio2**</u>: Encuentre la transformada de Fourier de la función (use definición)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \le 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

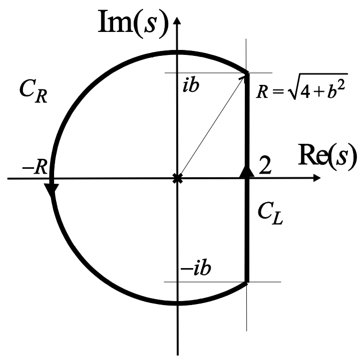
- **Propiedades** (pag.86). Linealidad, traslación en tiempo y en frecuencia, derivadas, convolución.
- Aplicación: resolver ecuaciones diferenciales de estado estacionario: $-\infty < t < +\infty$, análisis y procesamiento de señales en frecuencia.
- **Relaciones entre Fourier y Laplace. Transformada de Lapalce bilátera. Funciones causales.**

Si la abscisa de convergencia de $f(x)$ es $\alpha < 0$, entonces:

$\Phi\left( f(x)h(x)\right)_{(w)} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{L}\left( f(x)\right)_{(s=iw)}$ (el eje imaginario está contenido en la región de convergencia)

- **Fórmula de Inversión Compleja de Laplace.** $\frac{1}{2\pi i} V.P.C. \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s) e^{st} ds$

**<u>Ejercicio 3</u>:** Sea $F(s) = \frac{1}{s^2}$, para $s \neq 0$ y considere la curva cerrada mostrada en el gráfico ( es la unión de $C_R$ , que es una porción de círculo y $C_L$ un segmento vertical)




a. Calcule por residuos la integral: $\int_{C_R + C_L} F(s) e^{st} ds$

b. Acote la integral (para $t > 0$): $\left| \int_{C_R} F(s) e^{st} ds \right| \leq M.L$ , y muestre que tiende a cero cuando $R \to \infty$ .

c. Evalúe el límite $\lim_{b \to \infty} \left( \int_{C_R + C_L} F(s) e^{st} ds \right)$ y obtenga $\int_{2 - i\infty}^{2 + i\infty} F(s) e^{st} ds$

d. El resultado obtenido en el punto anterior es la la antitransformada para $t > 0$ de $F(s) = \frac{1}{s^2}$, usando la Fórmula de Inversión Compleja de Laplace. ¿Qué resultado da esta fórmula para $t \leq 0$?

**<u>Ejercicio 4</u>**: Sea: $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$ , y $g(x) = 10 f(x - 3)$, encuentre sus respectivas transformadas de Fourier.