Funciones de Variable Compleja

Clase 37, 20 de noviembre de 2019.

<u>Ejercicio 1</u>: Dada una función $f(t)$ que corresponde a datos temporales (t es el tiempo) medidos por un sensor de temperatura, considere los siguientes puntos:
¿Cómo se podría calcular el valor medio de una función $f(t)$ en un intervalo [0, T]? (suavizar, filtrar ruido)
¿Cómo se podría definir a la función $g(t,u)$ para que la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t,u)du$ corresponda al valor medio de $f(t)$ en último intervalo de T segundos?
¿cómo se puede calcular un promedio ponderado, dándole más prioridad o peso a los valores más recientes? (por ejemplo con un decaimiento exponencial $g(t)=e^{-t}$, $Y(s)=G(s)F(s)$)

Convolución Gráfica: $\left(f*g\right)_{(t)}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du$

Cuando las funciones son "causales", esto es que son nulas para $t<0$, esta definición coincide con la vista para Laplace: $\left(f*g\right)_{(t)}=\int_0^t f(u)g(t-u)du$.

<u>Ejercicio 2</u>: Considere las funciones $f(t)=(2-t)\big(h(t)-h(t-2)\big)$ y $g(t)=h(t)-h(t-2)$

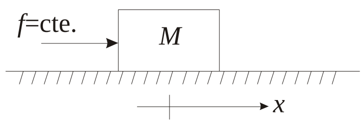
a) grafique: $f(u)$, $g(-u)$, $g(1-u)$, $g(3-u)$, $g(5-u)$
b) interprete gráficamente el efecto de variar *t* en $g(t-u)$
c) Evalúe la convolución cuando:
   i. $t<0$
   ii. $0<t<2$
   iii. $2<t<4$
   iv. $t>4$

Resultado:

$$\left(f*g\right)_{(t)}=\begin{cases} 0 & t<0 \\ 2-\dfrac{(t-2)^2}{2} & 0<t<2 \\ \dfrac{(t-4)^2}{2} & 2<t<4 \\ 0 & 4<t \end{cases}$$

Podemos interpretar a la convolución entre estas dos funciones,
como un cálculo de área de la función *f*, en el intervalo previo a *t* de longitud 2. La convolución es conmutativa, ¿qué interpretación le daríamos a $\left(g*f\right)_{(t)}$?

Ecuaciones diferenciales:



Ejemplo de un sistema mecánico. 2da ley de Newton.

Sea $v(t)=x'(t)$, y la fuerza de rozamiento $f_{roz}=-bv(t)$. Resolver la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes y con condiciones iniciales usando Transformada de Laplace:

$$Mv'(t)=f-v(t)b$$
$$v(0)=v_0$$
$$v(t)=?\quad \text{para } t>0$$

(Observar valor final e inicial y sus respectivos teoremas)
Si la fueza no es constante y genérica, escriba la solución como una convolución.

Ejercicio: Grafique el espectro en frecuencias de $f(x) = sen^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$

Si $-\pi < \mathrm{Arg}(w) \le \pi$, ¿ Dónde es analítica $\mathrm{Log}(1-iz) = \ln|1-iz| + i\,\mathrm{Arg}(1-iz)$?

[Sugerencia: use la transformación $w = 1-iz$ o su inversa $z = -i + iw$]

En qué se transforma la recta $x = 1$ al aplicarle $w = z^2$

Ejercicio:Considere la serie de funciones reales: $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}$,donde $c_n = \int_0^2 x^{10} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\,dx$.

i) ¿Es una serie de Fourier?¿De qué función?

ii) ¿Converge la serie sobre toda la recta real? Justifique, si la respuesta es afirmativa grafique la función suma.

iii)¿Es $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$? Justifique, si la respuesta es afirmativa indique el orden de decrecimiento de c_n.

Ejercicios Extras de Repaso:

$\mathscr{L}^{-1}\left(\mathrm{Log}\frac{s+1}{is-i}\right)_{(t)} =$ [donde $-\pi < \mathrm{Arg}(w) \le \pi$]

$\mathscr{L}^{-1}\left(\mathrm{Log}\frac{s+1}{is-i} - \frac{i\pi}{2}\right)_{(t)} =$

$\int_0^{\infty} e^{-t}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = \mathcal{L}\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)_{(s=1)} = \frac{\pi}{2} - \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

- Use los desarrollos

$$g_1(x) = x \approx \sum_{n=1}^{\infty} -2\frac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen}(nx) = \sum_{\substack{-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} i\frac{(-1)^n}{n}e^{inx}$$

$$g_2(x) = |x| \approx \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2k+1)^2}\cos((2k+1)x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{-2}{\pi(2k+1)^2}e^{i(2k+1)x}$$

para obtener el desarrollo de:

- $f_1(x) = \frac{x+|x|}{2}$, $-\pi < x < \pi$ (linealidad $f_1(x) = \frac{1}{2}g_1(x) + \frac{1}{2}g_2(x)$)
- $f_2(x) = 2x$, $-\pi < x < \pi$ (linealidad $f_2(x) = 2g_1(x)$)
- $f_3(x) = 4g_1(\frac{x}{2}) = 2x$, $-2\pi < x < 2\pi$ (cambio de escala, frecuencia/periodo y linealidad)
- $f_4(x) = x^2$, $-\pi < x < \pi$ (derivar o integrar desarrollos)
- $f_5(x) = x - \frac{\pi}{2}$, $-\pi < x < \pi$ (corrimiento vertical) $f_5(x) = g_1(x) - \frac{\pi}{2}$, afecta solo el a_0.)
- $f_6(x) = g_1(x - \frac{\pi}{2}) = x - \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < x < 3\frac{\pi}{2}$ (corrimiento horizontal)

Ejercicio: Sea $F(s)=\mathcal{L}\left(f(t)\right)_{(s)}$ para $\operatorname{Re}(s)>p$, demostrar usando la definición, las siguientes propiedades de la transformada de Laplace:

a) **Traslación:**
para α complejo: $\mathcal{L}\left(e^{\alpha t}\, f(t)\right)_{(s)}=\mathcal{L}\left(f(t)\right)_{(s-\alpha)}=F(s-\alpha)$, $\qquad \operatorname{Re}(s)>p+\operatorname{Re}(\alpha)$
para $a>0$ (real): $\mathcal{L}\left(h(t-a)f(t-a)\right)_{(s)}=e^{-as}\mathcal{L}\left(f(t)\right)_{(s)}=e^{-as}F(s)$, $\qquad \operatorname{Re}(s)>p$

b) **Cambio de escala:**
para $a>0$ (real): $\mathcal{L}\left(f(at)\right)_{(s)}=\dfrac{1}{a}\mathcal{L}\left(f(t)\right)_{\left(\frac{s}{a}\right)}=\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$, $\qquad \operatorname{Re}(s)>p\,a$

Ejercicio:
Sean $F(s)$ y $G(s)$ analíticas en el semiplano $\operatorname{Re}(s)>0$ y toman los mismos valores, $F(s)=G(s)$, sobre el eje real positivo.

a) ¿ $F(s)=G(s)$ en todo el semiplano $\operatorname{Re}(s)>0$?
Si duda en la respuesta, analice los siguientes puntos:

i) ¿ $L(s)=F(s)-G(s)$ es analítica en el semiplano $\operatorname{Re}(s)>0$?

ii) ¿ $L(s)$ tiene ceros sobre el eje real positivo? ¿esos ceros son aislados?

iii) ¿ $L(s)$ puede ser una función analítica no nula? (ver Teorema 50)

iv) ¿ $L(s)\equiv 0$ en el semiplano $\operatorname{Re}(s)>0$? (ver Teorema 51)

Ahora puede concluir que ¿ $F(s)=G(s)$ en el semiplano $\operatorname{Re}(s)>0$?

Para esta conclusión es importante notar que ambas funciones son **analíticas** en un dominio (**abierto** y **conexo**) y coinciden en un conjunto (infinito) de **puntos no aislados.**

b) ¿ Se puede asegurar que $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(G(s)\right)=g(t)$?

Ver teorema de Lerch

¿ $f(t)=g(t)$ en los puntos donde ambas son continuas?

Recuerde el ejemplo: $f(t)=1,\ g(t)=\begin{cases}1 & t\neq 3\\ 4 & t=3\end{cases}$.

Ambas tienen la misma T. de Laplace: $F(s)=G(s)=\dfrac{1}{s},\ \operatorname{Re}(s)>0$.

Ejercicio: Calcular $\mathcal{L}\left(\dfrac{e^{2t}-e^{-t}}{t}\right)_{(s)}$ para s real, luego extender analíticamente al semiplano $\operatorname{Re}(s)>2$.

Ejercicio: Dada la función $\operatorname{Log}\dfrac{s+1}{s-2}=\ln\left|\dfrac{s+1}{s-2}\right|+i\operatorname{Arg}\left(\dfrac{s+1}{s-2}\right)$, con $-\dfrac{3}{2}\pi<\operatorname{Arg}(w)\leq\dfrac{\pi}{2}$, se desea encontrar los puntos singulares, ó el *corte*, donde $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{s+1}{s-2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$, usando transformaciones.

Considere la composición de funciones: $\operatorname{Log}w$ y la bilineal $w=\dfrac{s+1}{s-2}$, y muestre que $\operatorname{Log}\dfrac{s+1}{s-2}$ es analítica en $\operatorname{Re}(s)>2$.

Sugerencia: use la transformación bilineal inversa: $s=\dfrac{2w+1}{w-1}$, para encontrar el corte, aplique la transformación bilineal inversa al rayo: $Arg(w)=\dfrac{\pi}{2}$, es decir el conjunto: $\operatorname{Im}(w)>0$, $\operatorname{Re}(w)=0$, donde $\operatorname{Im}(w)=\dfrac{w-\bar{w}}{2i}$, $\operatorname{Re}(w)=\dfrac{w+\bar{w}}{2}$.

Ejercicios de Coloquios:

1. Sea *f* una función real continua de variable real tal que $|f(t)|\leq 5e^{3t}\ \ \forall t\geq 0$, y sea
$F(s)=\mathscr{L}(f(t))_{(s)}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$.

i) ¿Existe alguna función distinta de *f* que tenga la misma transformada de Laplace que *f* ?

ii) Muestre utilizando la definición que: $4F(4s)=\mathscr{L}\left(f(t/4)\right)_{(s)}$, ¿para qué valores complejos de s se verifica?

iii)¿$F(4s)$ puede tener un punto singular tipo polo en $s=1$?

2. *a*) Indique condiciones suficientes para que la serie de Fourier de una función $f(x)$ definida en el intervalo $[-\pi,\pi]$ sea:

i) convergente $\forall x$ real.

ii) converja uniformemente sobre el intervalo $[-\pi,\pi]$.

ii) los coeficientes de Fourier decrezcan como $\dfrac{1}{n^3}$.

b) ¿La función $f(x)=\sqrt{|x|}$ definida en el intervalo $[-\pi,\pi]$ cumple algunas de las condiciones enunciadas en *a*)?

1. Sea $f(t)$ continua y de orden exponencial, $h(t)$ la función escalón, y *a* un número real positivo.

i) Muestre que existe $\mathcal{L}\left(f(t)\right)_{(s)}=F(s)$, indique la región de convergencia.

ii) Muestre que $\mathcal{L}\left(f(t-a)h(t-a)\right)_{(s)}=e^{-as}F(s)$.¿para qué valores complejos de *s* vale ?