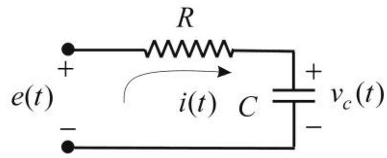
Funciones de Variable Compleja

Clase 36, 15 de noviembre de 2019.

- **Aplicaciones de Transformada de Laplace y Series de Fourier en análisis de circuitos.**



La ecuación diferencial

$$e(t) = RCv'_c(t) + v_c(t)$$

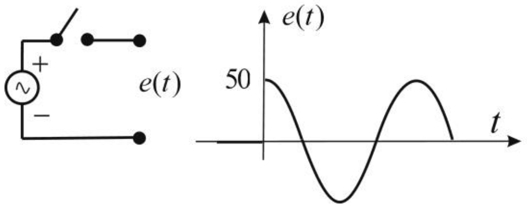
surge de plantear las leyes de Kirchhoff en el circuito RC serie , donde $v_c(t)$ es la tensión en bornes del capacitor, $R = 200\ 10^3\,\Omega$, y $C = 50\ 10^{-6}$ F . ($RC = 10seg.$)

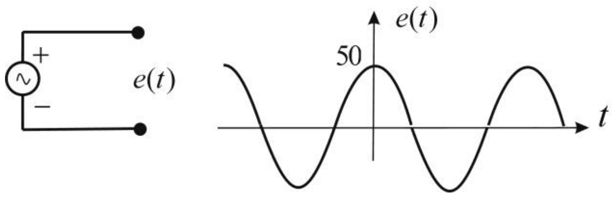
Resuelva las siguientes tres situaciones:

I) Encuentre el potencial en bornes del capacitor en función del tiempo $v_c(t)$, para $t > 0$, sabiendo que:

- El capacitor está descargado: $v_c(0) = 0$ volts
- La excitación es: $e(t) = 10\cos(0.2t)\,h(t)$ volts

¿Es posible aplicar el teorema del valor final en este caso?





II) Encuentre una solución periódica del potencial en bornes del capacitor $v_c(t)$, para $-\infty < t < +\infty$, sabiendo que:

- La excitación es: $e(t) = 10\cos(0.2t)$ volts$= 5e^{i0.2t} + 5e^{-i0.2t}$ volts

Compare los dos casos y observe las componentes transitorias (se desvanecen con el tiempo) y las componentes estacionarias (perduran en el tiempo) de cada solución.

Resolución caso **I**)

$$e(t) = 10v'_c(t) + v_c(t)$$
$$v_c(0) = 0$$
$$e(t) = 10\cos(0.2t)\,h(t)$$

$$v_c(t) = ?\ \text{para}\ t > 0$$

Aplicando transformada de Lapalce:

$$\frac{10s}{s^2 + 0.2^2} = 10sV_c(s) + V_c(s)$$

$$V_c(s) = \frac{s}{(s^2 + 0.04)(s + 0.1)}$$

$$V_c(s) = -\frac{2}{s + 0.1} + \frac{1 - 2i}{s - 0.2i} + \frac{1 + 2i}{s + 0.2i}$$

luego, antitransformando, $v_c(t) = -2e^{-0.1t} + (1-2i)e^{i\,0.2t} + (1+2i)e^{-i\,0.2t}$ para $t > 0$.

Operando

$$\begin{aligned} v_c(t) &= -2e^{-0.1t} + (e^{i\,0.2t} + e^{-i\,0.2t}) - 2i(e^{i\,0.1t} - e^{-i\,0.2t}) \\ &= -2e^{-0.1t} + (2)\frac{e^{i\,0.2t} + e^{-i\,0.2t}}{2} - 2i(2i)\frac{e^{i\,0.2t} - e^{-i\,0.2t}}{2i} \end{aligned}$$

finalmente: $v_c(t) = -2e^{-0.1t} + 2\cos(0.2t) + 4\operatorname{sen}(0.2t)$ para $t > 0$.

En este caso no se puede aplicar el teorema del Valor Final pues no existe $\lim_{t\to\infty} v_c(t)$.

Resolución caso **II**)

$$e(t) = 10v'_c(t) + v_c(t)$$

$$e(t) = 10\cos(0.2t) \; = 5e^{i0.2t} + 5e^{-i0.2t}$$

Solución periódica continua (del mismo período que la excitación):

$$v_c(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_n\, e^{in0.2t}$$

$$v'_c(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} in0.2\,\gamma_n\, e^{in0.2t}$$

luego reemplazando las series de Fourier en la ecuación diferencial:

$$\left(5e^{i0.2t} + 5e^{-i0.2t}\right) = 10\sum_{-\infty}^{+\infty} in0.2\,\gamma_n\, e^{in0.2t} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_n\, e^{in0.2t}$$

$$0 \; = \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} (2in+1)\gamma_n\, e^{in0.2t}\right) - 500e^{i0.2t} - 500e^{-i0.2t}$$

como los términos son funciones ortogonales, la única combinación que da la función nula es cuando todos los coeficientes de Fourier son nulos. Evaluando cada coeficiente:

para $n = 0$, $0 \; = \gamma_0 \Rightarrow \gamma_0 = 0$.

para $n = 1$, $0 \; = (2i+1)\gamma_1 - 5 \Rightarrow \gamma_1 = \dfrac{5}{2i+1} = 1 - 2i$

para $n = -1$, $0 \; = (-2i+1)\gamma_{-1} - 5 \Rightarrow \gamma_{-1} = \dfrac{5}{-2i+1} = 1 + 2i$

para $|n| > 1$, $0 \; = (in+20)\gamma_n \Rightarrow \gamma_n = 0$

Por lo tanto la serie resulta una suma finita:

$$v_c(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_n\, e^{in0.2t} \; = (1+2i)e^{-i0.2t} + (1-2i)e^{i0.2t}$$

$$v_c(t) = 2\cos(0.2t) + 4\operatorname{sen}(0.2t)$$

Observar que esta solución es la componente estacionaria de la solución del caso **I)**

Otros casos:

- Plantear cómo resolver si la excitación es una onda cuadrada

- Si la resistencia es variable en el tiempo $R(t) = 200(1+.1t)\ 10^3\,\Omega$ (por ejemplo por efectos térmicos) . Buscar solución con series de potencias: $v_c(t) = \sum_0^{+\infty} a_n\, t^n$