

Funciones de Variable Compleja

Clase 35, 13 de noviembre de 2019.

Ejercicio 1: Dado el círculo unitario, $|z|=1$, recorrido en sentido antihorario, encontrar su imagen bajo las siguientes transformaciones:

a) $w_1 = 2iz$ b) $w_2 = \frac{1}{2}z + i$ c) $w_3 = \frac{1}{z}$ d) $w_4 = z^2$

Observar el sentido en las curvas imágenes y la variación del argumento. Aplicar el **teorema 69 (Principio de Variación del Argumento)**, en las cuatro transformaciones anteriores.

Ejercicio 2:

- ¿Cuáles de las transformaciones anteriores transforman círculos en círculos y rectas en rectas?
- Muestre que la transformación inversión *transforma círculos y rectas en círculo o rectas*. Observe además, si las curvas pasan o no por el origen. (Sugerencia: recordar ecuación general de círculo o recta, práctico 2, ej.7).
- La T. Bilineal es una composición de lineal+inversión+lineal. *Por lo tanto: ¿Las bilineales transforman círculos y rectas en círculo o rectas?*

Transformaciones Conformes-Conservación de ángulos- funciones armónicas

Ejercicio 3: Sea $c : z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$, una curva suave en el plano complejo, y $w = f(z)$, analítica sobre la curva cuya derivada no se anula en la curva.

- Encuentre un vector tangente a la curva c en el punto $z_0 = z(t_0)$, $t_0 \in (a, b)$.
- Sea Γ la imagen de la curva c al aplicarle la transformación $w = f(z)$. Relacione el ángulo de la tangente a la curva Γ en el punto $w_0 = f(z_0)$ con la pendiente de la tangente a la curva original en z_0 .
- Muestre la propiedad de conservación de ángulos al aplicarle una transformación conforme a un par de curvas que se cortan en un punto y sus respectivas imágenes.

Ejercicio 4: Dadas las siguientes transformaciones bilineales:

$$w_1 = \frac{z-1}{z+2i} \quad \text{y} \quad w_2 = \frac{2z-i}{z+3}$$

- a) ¿Las transformaciones son conformes? Si son biyectivas encuentre sus respectivas inversas.
- b) La imagen del círculo unitario, $|z|=1$, recorrido en sentido antihorario:
- ¿ será una recta o un círculo?
(¿la curva pasa por el polo de la transformación?)
 - Si es una recta ¿pasa o no por el origen?
(¿la curva pasa por el cero de la transformación?)
 - Si es un círculo ¿pasa o no por el origen, o lo encerrará?
(Principio de Variación del Argumento)
- c) Usando las transformaciones inversas halladas en a), reemplace en la ecuación $|z|=1$, para encontrar las respectivas imágenes, ¿verifican lo anticipado en b)?
- d) Observe las imágenes de los puntos $z_1=0$, $z_2=1$ y $z_3=-1$. ¿Transformando 3 puntos puedo conocer bien la imagen? Fórmula de los 3 puntos.