

Funciones de Variable Compleja

Clase 34, 11 de noviembre de 2019.

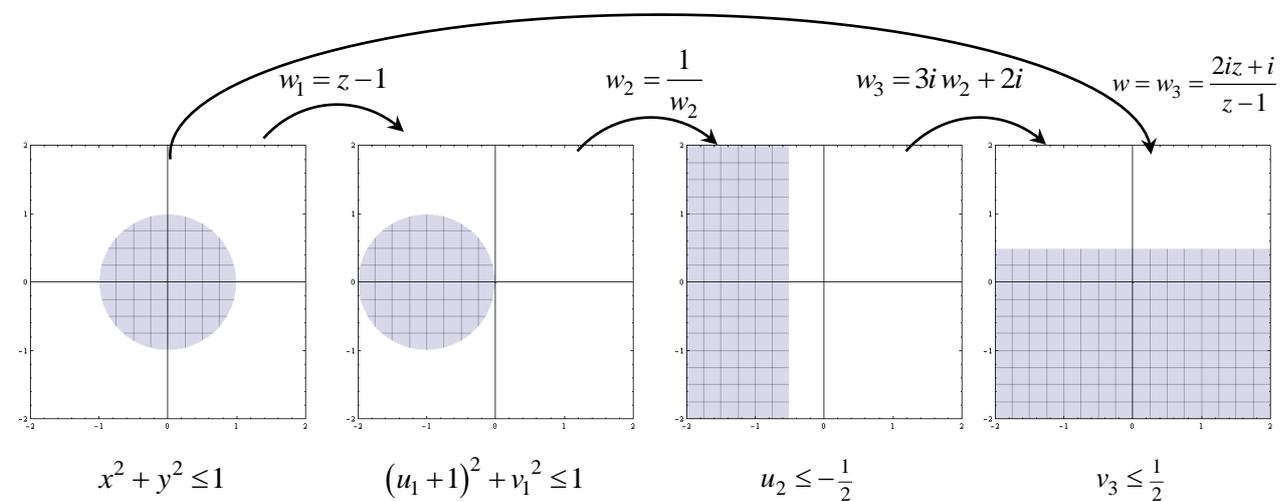
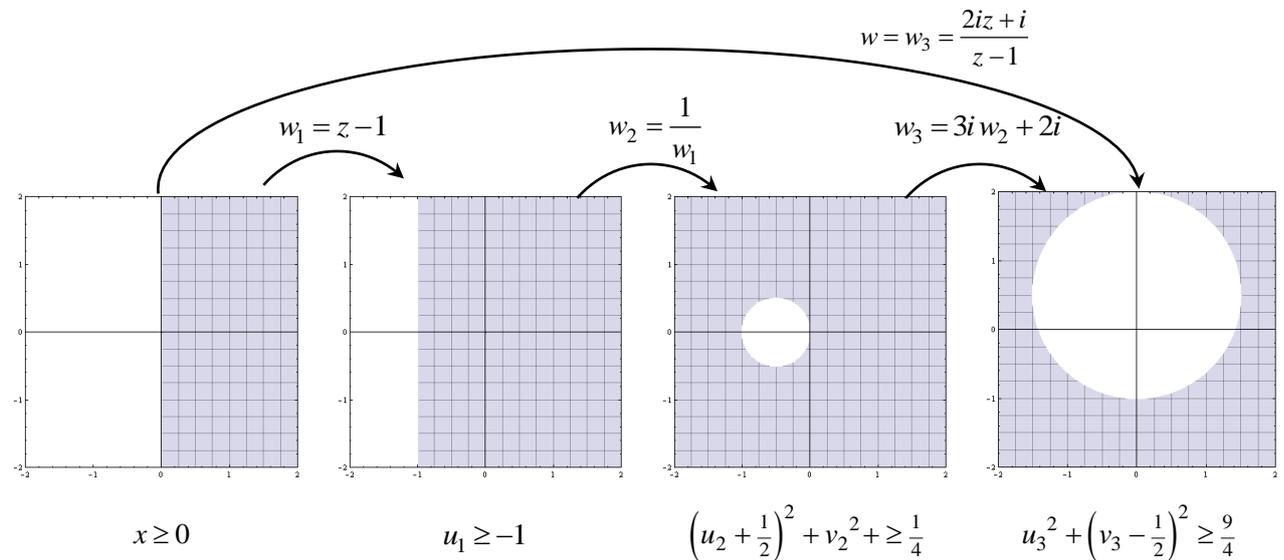
Transformación Bilineal $w = \frac{az+b}{cz+d}$

Ejemplo: $w = \frac{2iz+i}{z-1}$, encontrar la imagen de $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = i, z_4 = -1$ y $z_5 = -i$.

- Composición de lineal+inversión+lineal. Las bilineales transforman círculos y rectas en círculo o rectas. En el ejemplo:

$$\begin{cases} w_1 = z - 1 \\ w_2 = \frac{1}{w_1} \\ w_3 = 3i w_2 + 2i \end{cases} \quad \text{pues} \quad \begin{aligned} w &= \frac{2iz+i}{z-1} = \frac{2i(z-1+1)+i}{z-1} = \frac{2i(z-1)+2i+i}{z-1} \\ &= 2i + \frac{3i}{z-1} \end{aligned}$$

- Encontrar las imágenes de $\text{Re}(z) \geq 0, |z|=1$ y de $|z| \leq 1$. Observar el sentido de recorrido sobre el conjunto frontera y la conservación del interior (a la derecha o a la izquierda). ¿la transformación es conforme? Ver definiciones 74 75 y 76.

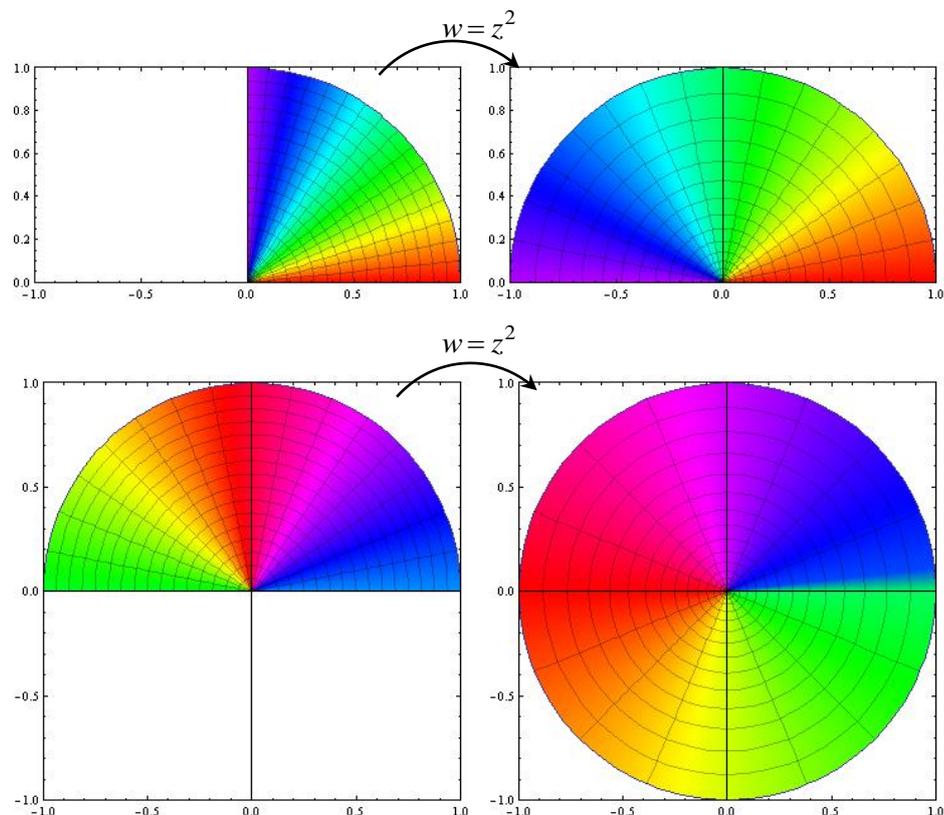


- En lugar de componer las tres transformaciones puede encontrar la imagen planteando la transf. inversa de $w = \frac{2iz+i}{z-1}$, es decir: $z = \frac{w+i}{w-2i}$, luego $|z| \leq 1 \Leftrightarrow |w+i| \leq |w-2i| \Leftrightarrow \text{Im}(w) \leq \frac{1}{2}$.

- ¿Cuándo una transformación es conforme? ¿Qué significa que se conserve la “forma”?
- Definiciones: 74,75 y 76.
- Aplicaciones en campos conservativos, funciones armónicas. Teorema 68.

Ejercicio 2: Aplique la transformación $w = z^2$ a las siguientes regiones:

- El sector angular $0 \leq |z| \leq 1$ y $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$.
- El sector angular $0 \leq |z| \leq 1$ y $0 \leq \arg z \leq \pi$.
- Observar la conservación o no de los ángulos. Ver definiciones de Transformaciones Conformes (Def. 74 75 y 76) ¿Todos los puntos fronteras se transforman en puntos frontera? ¿Por qué?



Ejercicio 3: Indique si las siguientes transformaciones son conformes en todo el plano

- $w = \alpha z + \beta$, $\alpha \neq 0$
- $w = \frac{1}{z}$
- $w = z^2$
- $w = \frac{az + b}{cz + d}$, $ad - cb \neq 0$ y $c \neq 0$

Ejercicio 4:

- ¿Cuáles de las transformaciones anteriores transforman círculos en círculos y rectas en rectas?