Funciones de Variable Compleja

Clase 32, 4 de noviembre de 2019.

Ejercicio: Dada la función periódica $sen^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x) = -\frac{1}{4}e^{-i2x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{i2x}$, analice los siguientes puntos

a) Encuentre la Serie de Fourier Trigonométrica y la Serie de Fourier Compleja (observe que en este caso la serie de Fourier tiene una cantidad finita de términos no nulos)

b) Grafique la *función suma* para cada una de las series.

c) Dibuje el Espectro en frecuencias

d) Calcule su Valor Medio: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ (recuerde la definición de a_0 y γ_0)

e) Calcule su Valor Medio Cuadrático **(ó RMS)** $\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx}$ (use la igualdad de Parseval)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(sen^2(x)\right)^2 dx = \frac{a_0^{\,2}}{2} + \sum_1^\infty (a_n^{\,2} + b_n^{\,2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \sum_{-\infty}^{\infty}|\gamma_n|^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{3}{8}.$$

$$\text{Luego: RMS}\left(f(x)\right) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{8}}$$

- **Funciones Ortogonales**
- **Recordar definiciones de:**
  - **Espacio vectorial** (def. 77) Ejemplos: $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$, C[a,b]
  - **Independencia lineal** (def. 78)
  - **Producto escalar**(def. 80) Ejemplo en C[a,b]
  - **Vectores ortogonales** (def. 81)

$$\left\{\frac{1}{2}, \cos(x), \text{sen}(x), \cos(2x), \text{sen}(2x), \ldots, \cos(nx), \text{sen}(nx), \ldots\right\}$$

  - **Norma, módulo de vectores**(def. 82)
  - **Sistema o Conjunto de vectores ortonormales**(def. 83)

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\text{sen}(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\text{sen}(2x)}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\text{sen}(nx)}{\sqrt{\pi}}, \ldots\right\}$$

  - **Proyección Ortogonal**
- **Serie de Fourier Generalizada** (def. 84) Ejemplos: polinomios ortogonales
- **Aproximación de funciones con sumas parciales de series de Fourier. Los coeficientes de Fourier minimizan el error medio cuadrático.** (Teo 70)
- **Identidad de Parseval (en $\mathbb{R}^2$ es Pitágoras?)**

Ejemplo de Funciones Ortogonales:
La ortogonalidad depende de cómo se defina el producto escalar. Hay muchas formas, cada una se

ajusta resolver un problema en particular, como por ejemplo para resolver ecuaciones diferenciales., procesar, o filtrar señales, audio, imágenes, video, ondas, etc…

- Polinomios de Legendre.
- Funciones de Bessel
- Wavelets

Series de Fourier como espacios vectoriales

Recordemos que una serie de Fourier, se puede pensar como un espacio vectorial, donde a la señal se la describe a través de una base, donde cada componente corresponde a una frecuencia. Pero la base puede estar formada por otros vectores (funciones) como por ejemplo polinomios

Por ejemplo, consideremos el intervalo $[0,1]$ y el conjunto $\{a_0, b_0 + b_1 x\}$. Este conjunto tiene dos vectores, los cuales son funciones definidas en ese intervalo, donde el primer vector corresponde a frecuencia cero y el segunmdo a frecuencia angular 1. Dicho conjunto:

a) Encuentre los coeficientes a_0, b_0 y b_1 para que sean ortonormales en $[0,1]$

b) Si queremos aproximar x^2 el intervalo $[0,1]$, mediante la combinación $\alpha_1.(a_0),+\alpha_2.(b_0+b_1 x)$, ¿cómo debemos elegir los coeficientes α_1 y α_2 para que el error medio cuadrático sea mínimo?

Generalizando, si queremos aproximar una función $f(x)$ con una combinación lineal de los vectores de un conjunto ortonormal $\{\phi_n(x)\}$, es decir la aproximación es $S(x)=\sum \alpha_n \phi_n(x)$, ¿cómo elegimos los coeficientes para que el error sea mínimo?
Definamos el vector error $e(x)=S(x)-f(x)$, y tratemos que se mínima su norma $\|e(x)\|=\sqrt{\langle e(x),e(x)\rangle}$

$$\|e(x)\|^2 = \int_a^a \left(S(x)-f(x)\right)^2 dx = \langle S(x)-f(x), S(x)-f(x)\rangle = \langle \sum \alpha_n\phi_n(x)-f(x), \sum \alpha_n\phi_n(x)-f(x)\rangle$$

$$= \langle f(x), f(x)\rangle - \sum 2\alpha_n \langle \phi_n(x), f(x)\rangle + \sum_{n\neq m} 2\alpha_n\alpha_m \langle \phi_n(x), \phi_m(x)\rangle + \sum \alpha_n{}^2 \langle \phi_n(x), \phi_m(x)\rangle$$

$$= \| f(x)\|^2 - \sum 2\alpha_n \langle \phi_n(x), f(x)\rangle + \sum \alpha_n{}^2$$

Completando cuadrados:

$$\|e(x)\|^2 = \| f(x)\|^2 + \sum(\alpha_n - \langle \phi_n(x), f(x)\rangle)^2 - \sum \langle \phi_n(x), f(x)\rangle^2$$

De donde se observa que el error es mínimo cuando $\alpha_n = \langle \phi_n(x), f(x)\rangle = c_n$, los coeficientes son los de Fourier, $\|e(x)\|^2 = \| f(x)\|^2 - \sum c_n{}^2$. Es decir las sumas parciales de una serie de Fourier son las mejores aproximaciones, en el sentido de minimizar la integral $\int_a^a \left(S(x)-f(x)\right)^2 dx = \int_a^a \left(\sum \alpha_n\phi_n(x)-f(x)\right)^2 dx$, minimiza el error medio cuadrático. Si volvemos al ejercicio planteado, usando las fórmulas para los dos primeros términos del desarrollo de Fourier, es la mejor aproximación de x^2 en el intervalo $[0,1]$.

Si el error tiende a cero cuando *n* tiende infinito

$\lim_{n\to\infty} \|e(x)\|^2 = 0 = \| f(x)\|^2 - \sum^{\infty} c_n{}^2$, se obtiene la identidad de Parseval:

$$\int_a^b f(x)dx = \| f(x)\|^2 = \sum^{\infty} c_n{}^2$$