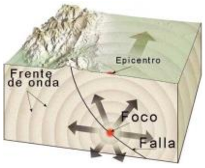
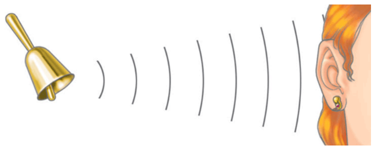
Funciones de Variable Compleja

Clase 31, 1 de noviembre de 2019.

Vivimos rodeados de **ondas**, ¿qué es una onda?

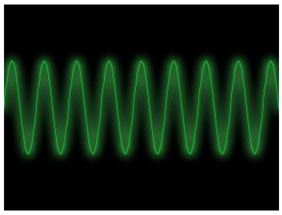






- ✓ Una perturbación que se propaga en el espacio y en el tiempo a través de un medio, transmite energía pero no materia.
- ✓ Las ondas más interesantes de la naturaleza son periódicas. Eso quiere decir que no es una única perturbación la que viaja, sino que son muchas (muchísimas) perturbaciones, una atrás de la otra, todas iguales y equiespaciadas. Eso es una onda periódica.

Mecánicas: se propagan en medios materiales: ondas elásticas, sonido, en el agua (al arrojar una piedra), mareas, sísmicas



Electromagnéticas: se propagan por el espacio sin necesidad de un medio: televisión, radio, AM ,FM, WiFi, microondas, rayos X, luz, infrarrojos, ultravioleta, etc

¿Cómo representarlas en forma matemática?

Las más simples son las ondas armónicas, usando funciones trigonométricas (o exponenciales complejas)

$$y(x,t) = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t)$$

Características de las ondas:

Longitud de onda λ: distancia entre dos picos consecutivos $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$, [m].

Amplitud A: máximo desplazamiento de una partícula.

Periodo T: tiempo entre dos crestas, $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, [seg.].

Frecuencia f: número de oscilaciones por unidad de tiempo en un mismo punto, $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$, [Hz.].

Número de onda angular: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ [rad/m].

Frecuencia angular $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$,[rad/seg].

Cuando la onda periódica no es simple, siempre la podemos pensar en su **desarrollo de Fourier**, donde además de la frecuencia fundamental aparecen sus múltiplos o “armónicos”. Vemos estas características en el ejemplo del **sonido** u **ondas sonoras**:

En el sonido la **altura**, tono, grave-agudo, se refiere a la frecuencia [Hz]. El nivel de **Intensidad** a la Amplitud[dB] y el **Timbre** (claro, brillante, apagado) a su espectro en frecuencia, y la envolvente (ataque-sostenimiento-desvanecimiento).

Cuando los instrumentos musicales, piano, guitarra, flauta, emiten la misma nota, por ejemplo el La central (440Hz) ¿por qué los diferenciamos? Si están bien afinados, sus ondas tienen la misma frecuencia fundamental, sin embargo difieren en el Timbre, en sus armónicos. Es decir sus espectros en frecuencia tienen patrones diferentes. Recordar los gráficos de espectros vistos en funciones sencillas. Cuando se usan Ecualizadores, se están afectando directamente los coeficientes de Fourier correspondientes a pequeñas bandas de frecuencias.



Espectros en frecuencia. Considerar los ejemplos:

$$f(x) = x, -\pi < x \le \pi \ , \ \ f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} -2\frac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen}(nx) \, .$$

$$|x| \approx \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k+1)^2}\cos\left((2k+1)x\right) = \frac{\pi}{2} + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{-2}{\pi(2k+1)^2} e^{i(2k+1)x}$$

a) Exprésenlos en forma exponencial

[Respuesta: $f(x) \approx \sum_{\substack{-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} i\frac{(-1)^n}{n} e^{inx}$ $\qquad |x| \approx \frac{\pi}{2} + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{-2}{\pi(2k+1)^2} e^{i(2k+1)x}$]

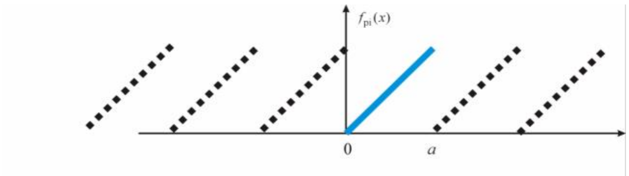
b) Grafique $|\gamma_n|$ y $\operatorname{Arg}(\gamma_n)$ en función de la frecuencia *n*, es decir es el gráfico del **espectro en frecuencia**.

c) Observar la interpretación gráfica del término $\gamma_0 \ \frac{a_0}{2}$ (valor medio), y el significado de frecuencia (repeticiones por unidad de tiempo) $f = \frac{1}{T}$, o la frecuencia angular ω, (repeticiones en cada intervalo de longitud 2π , $\omega = 2\pi f$). Observar que en toda serie de Fourier hay presente una frecuencia que es la menor de todas, $\omega_0 = \frac{\pi}{L}$, y se llama: "frecuencia fundamental". Es inversamente proporcional al período, en el ejemplo $\omega_0 = 1$. Las otras frecuencias que aparecen son múltiplos de la fundamental o "armónicos", $\omega_n = \frac{n\pi}{L}$ (en este ejemplo $\omega_n = n$).

d) Observar espectros en frecuencia. Ver gráficos de páginas 67/68

- **Orden de decrecimiento de los coeficientes**. Observar la suavidad de las extensiones periódicas de las funciones: $f(x) = x, -\pi < x \le \pi$ y $g(x) = |x|, -\pi < x \le \pi$ (es decir ¿cuántas derivadas continuas posee?) Determina el orden de decrecimiento de los coeficientes de la serie de Fourier. Observar los gráficos de módulos en las pag. 67-68.

<u>Ejercicio</u>: Sea: $f(x) = x, \ 0 \le x \le \pi$, extender la función para desarrollar en serie de período $T = \pi, \ L = \frac{\pi}{2}$.



$$f_{pi}(x) \approx \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\operatorname{sen}(2nx)$$

Teorema 66. Identidad de Parseval. Aplicar la fórmula de Parseval en el desarrollo de $f(x) = x, \ 0 \le x \le \pi$, y mostrar que: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

<u>Ejercicio</u>: Muestre las relaciones entre los coeficientes de la serie de Fourier de exponenciales complejas y la serie de Fourier trigonométrica:

$$\gamma_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad n > 0; \qquad \gamma_0 = \frac{a_0}{2}; \qquad \gamma_{-n} = \overline{\gamma}_n$$