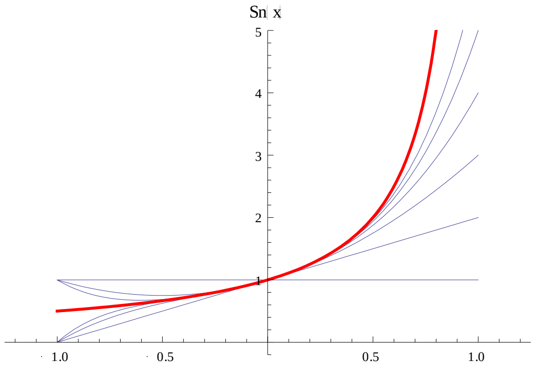
# Funciones de Variable Compleja

## Clase 2, 14 de agosto de 2019

<u>Ejercicio 1</u>: ¿para qué valores de $x$ converge $\sum_{0}^{\infty} x^n$ ?

### Funciones definidas con series de funciones

$$S(x) = \sum_{0}^{\infty} x^n$$




- Dominio de definición, intervalos de convergencia. Definiciones 16 y 17.

Las curvas azules en el gráfico representan la *Sucesión de funciones de sumas parciales*:

$$S_N(x) = \sum_{0}^{N} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^N = \begin{cases} N+1 & x = 1 \\ \dfrac{1-x^{N+1}}{1-x} & x \neq 1 \end{cases}$$

Como $\lim\limits_{N\to\infty} S_N(x) = \begin{cases} \text{diverge} & |x| \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-x} & |x| < 1 \end{cases}$, la región de convergencia es el intervalo (-1,1), y la *función suma* o función a la cual converge la serie es: $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$, definida sólo en el intervalo (-1,1), que corresponde a la curva roja en la figura.

- Dominio de definición, intervalos de convergencia. Definiciones 16 y 17.

Encuentre el dominio de definición en ambos ejemplos y grafique ambas funciones.

- **Convergencia puntual y uniforme**. Definiciones 19 y 20.
  Lea las definiciones, compare e interprete las diferencias.
- **Test de Weierstrass**. Teorema 11.

<u>Ejercicio</u>: Analice la convergencia uniforme de $S(x) = \sum_{0}^{\infty} x^n$ en $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

¿Se puede ampliar el intervalo donde la convergencia es uniforme?

[Ver: http://lcr.uns.edu.ar/fvc/convergencia_uniforme.htm]

Ejemplos de Convergencia Condicional:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \qquad \int_0^{\infty} \frac{sen(x)}{x} dx \,,$$

ver el desarrollo en el archivo pdf en: http://lcr.uns.edu.ar/fvc/curiosidades.htm

Ejercicio 1: Considere la serie de funciones: $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( x^n - x^{n+1} \right)$

Observe que es telescópica, la suma parcial es $S_N(x) = 1 - x^{N+1}$.

Encuentre la función suma, grafique y vea su continuidad. ¿Una suma infinita de funciones continuas puede ser discontinua? Esto está relacionado con la convergencia uniforme.

- **Continuidad de la función suma**. Teorema 12.

  ¿La convergencia $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( x^n - x^{n+1} \right)$ en (-1,1] es uniforme?

- **Funciones definidas con integrales impropias**.

  $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dx$

Encuentre el dominio de definición de la función $F(s)$ .

- **Convergencia puntual y uniforme**. Definiciones 21 y 22.

  Lea las definiciones, compare e interprete las diferencias.

- **Test de Weierstrass**. Teorema 13.

Ejercicio 2: Analice la convergencia uniforme de $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dx$ en $[1, +\infty)$

¿Se pueden ampliar el intervalo donde la convergencia es uniforme?