Funciones de Variable Compleja

Clase 29, 28 de octubre de 2019

Ejercicio 1: Analice todas las singularidades de las funciones, ¿es posible descomponer en fracciones simples? Para cada una de las funciones, si es posible, encuentre su antitransformada de Laplace. ¿Son funciones reales:

a) $F(s)=\dfrac{e^{-s}-1}{s}$ b) c) $F(s)=e^{\frac{1}{s}}$ d) $F(s)=\dfrac{2}{s^2\left(s^2+1\right)}=\dfrac{\mathrm{A}}{s}+\dfrac{\mathrm{B}}{s^2}+\dfrac{\mathrm{C}}{s-i}+\dfrac{\mathrm{D}}{s+i}$

Ejercicio. Muestre que $g(x)=\operatorname{sen}(5x)$ es de periodo $T=2\pi$.
¿puede encontrar un periodo menor?
Observe

- El menor período de la función $\operatorname{sen}(x)$ es 2π, por lo tanto para la función $g(x)=\operatorname{sen}(5x)$, cuando x recorre un período T, $5x=5T=2\pi$, entonces el mínimo periodo de g es $T=\dfrac{2\pi}{5}$.
- La cantidad de ciclos por unidad de x (si es tiempo sería segundos), se llama frecuencia $f=\dfrac{1}{T}$ [Hz], en g la frecuencia es $f=\dfrac{5}{2\pi}\text{Hz}$.
- La frecuencia angular $\omega=2\pi f$, que se mide en radianes/segundo, (es el factor que multiplica a la x dentro del argumento donde se aplica la función sen), en g la frecuencia angular $\omega=5\,\text{rad/s}$.

Series de Fourier. Definición 72. Coeficientes de Fourier. Teorema 62. Convergencia de la serie.

Ejercicio. Para la función: $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x\le 0\\ x & 0\le x<\pi\end{cases}$, $f(x+2\pi)=f(x)$

(a) Encontrar la serie trigonométrica de Fourier

$$f(x)\approx\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+b_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

Ayuda: $\displaystyle\int x\cos(ax)dx=\frac{\cos(ax)}{a^2}+\frac{x\operatorname{sen}(ax)}{a}$

$\displaystyle\int x\operatorname{sen}(ax)dx=\frac{\operatorname{sen}(ax)}{a^2}-\frac{x\cos(ax)}{a}$

Respuesta: $\displaystyle f(x)\approx\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos\left(nx\right)-\frac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen}\left(nx\right)$

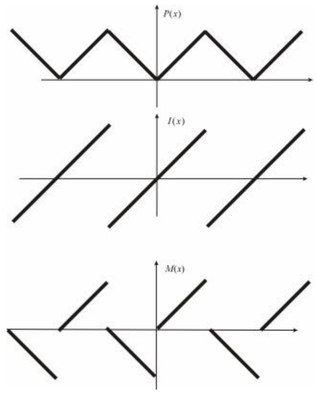
(b) Encontrar la serie de Fourier de exponenciales complejas: $\displaystyle f(x)\approx\sum_{-\infty}^{\infty}\gamma_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}$

Ayuda: $\displaystyle\int xe^{ax}dx=e^{ax}\left(\frac{ax-1}{a^2}\right)$

Respuesta: $\displaystyle f(x)\approx\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n-1+in\pi(-1)^n}{2\pi n^2}e^{inx}$.

Observar que : $\gamma_n=\dfrac{a_n-ib_n}{2}$ y $\gamma_{-n}=\overline{\gamma}_n$.

(c) Grafique la función suma de ambas serie. (¿es la misma?) Observe a qué converge en los puntos donde la función es continua y donde no lo es. Vea las Condiciones de Dirichlet



Ejercicio 1: **Simetrías**

- Simetría Par .- Serie de cosenos
- Simetría Impar.- Serie de senos
- Simetría de Media Onda.- Serie con armónicos sólo impares

Detectar simetrías ayuda en el cálculo de los coeficientes a_n y b_n. Observar que $e^{i\frac{n\pi x}{L}}$ no es una función par ni impar, por lo tanto no se puede reducir el intervalo de integración para calcular γ_n, sin embargo si *f* es par $\operatorname{Im}(\gamma_n) = 0$, y si *f* es impar $\operatorname{Re}(\gamma_n) = 0$.

Ejercicio 2: Desarrollar en serie de Fourier la función: $f(x) = |x|, -\pi \le x \le \pi$, y grafique la función suma:

$$f(x) \approx \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos(nx) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k+1)^2}\cos((2k+1)x) f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{-2}{\pi(2k+1)^2} e^{i(2k+1)x}$$

Ejercicio 3: Desarrollar en serie de Fourier la función: $f(x) = x, -\pi < x < \pi$, y grafique la función suma:

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} -2\frac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen}(nx) = \sum_{\substack{-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} i\frac{(-1)^n}{n}e^{inx} \qquad \text{Ayuda: } \int x\operatorname{sen}(ax)dx = \frac{\operatorname{sen}(ax)}{a^2} - \frac{x\cos(ax)}{a}$$

Ejercicio 4: Desarrollar con una serie de Fourier de exponenciales complejas la función:
$f(x) = e^x + e^{-x}$, $-\pi < x \le \pi$. [Recuerde: $f(x) \approx \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}$ donde $\gamma_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}dx$]

- Observar la interpretación gráfica del término $\frac{a_0}{2}$ (valor medio), y el significado de frecuencia (repeticiones por unidad de tiempo) $f = \frac{1}{T}$, o la frecuencia angular ω, (repeticiones en cada intervalo de longitud 2π , $\omega = 2\pi f$). Observar que en toda serie de Fourier hay presente una frecuencia que es la menor de todas, $\omega_0 = \frac{\pi}{L}$, y se llama: “frecuencia fundamental”. Es inversamente proporcional al período, en el ejemplo $\omega_0 = 1$. Las otras frecuencias que aparecen son múltiplos de la fundamental o “armónicos”, $\omega_n = \frac{n\pi}{L}$.

- En la función del ejercicio 2, aparecen sólo los armónicos impares, excepto que $\frac{a_0}{2} \neq 0$. Si bien *f* no tiene simetría de media onda, con un desplazamiento vertical, la función $f(x) - \frac{a_0}{2}$ tiene simetría de media onda, por ello sólo aparecen armónicos impares en el desarrollo de Fourier de *f*, podemos decir que *f* tiene simetría de media onda “levantada”. Casos similares pueden ocurrir con las simetrías par e impar.