Funciones de Variable Compleja

Clase 28, 25 de octubre de 2019.

Ejercicio 1: Analice todas las singularidades de las funciones, ¿es posible descomponer en fracciones simples?:

a) $F(s)=\dfrac{e^{-s}-1}{s}$ b) c) $F(s)=e^{\frac{1}{s}}$ d) $F(s)=\dfrac{2}{s^2\left(s^2+1\right)}=\dfrac{\mathrm{A}}{s}+\dfrac{\mathrm{B}}{s^2}+\dfrac{\mathrm{C}}{s-i}+\dfrac{\mathrm{D}}{s+i}$

Ejercicio 2: Si es posible, para cada una de las funciones del ejercicio 1 encuentre su antitransformada de Laplace. ¿Son funciones reales?

Ejercicio 3: Calcular usando convolución:

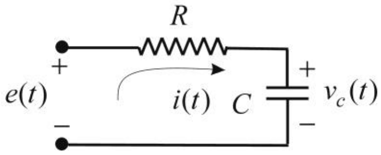
i) $h(t-1)*t$ ii)¿ $\mathcal{L}\left(h(t-1)*t\right)_{(s)}=\mathcal{L}\left(h(t-1)\right)_{(s)}\mathcal{L}\left(t\right)_{(s)}$?

Aplicaciones de Transformada de Laplace en resolución de ecuaciones diferenciales (lineales con coeficientes constantes).

I) Resolver el sistema $\begin{cases} y'(t)=2x(t) \\ x'(t)=-2y(t) \end{cases}$ $y(0)=1, x(0)=1$

II) La ecuación diferencial

$$e(t)=RCv'_c(t)+v_c(t)$$



surge de plantear las leyes de Kirchhoff en el circuito RC serie , donde $v_c(t)$ es la tensión en bornes del capacitor, $R=200\ 10^3\,\Omega$, y $C=50\ 10^{-6}\,\mathrm{F}$. ($RC=10seg.$).

Encuentre el potencial en bornes del capacitor en función del tiempo $v_c(t)$, para $t>0$, sabiendo que:

- La tensión inicial del capacitor es: $v_c(0)=0$ volts
- La excitación es: $e(t)=10$ volts

Resolución: Aplicando transformada de Laplace y llamando $V_c(s)=\mathcal{L}\left(v_c(t)\right)$:

$$\mathcal{L}\left(e(t)\right)=\mathcal{L}\left(RCv'_c(t)+v_c(t)\right)$$

$$\frac{10}{s}=10\left(s\mathcal{L}\left(v'_c(t)\right)-v_c(0)\right)+\mathcal{L}\left(v_c(t)\right)$$

$$\frac{10}{s}=10\left(sV_c(s)-0\right)+V_c(s)$$

$$V_c(s)=\frac{10}{s(10s+1)}=\frac{1}{s(s+1/10)}=\frac{10}{s}-\frac{10}{s+1/10}$$

$$\Rightarrow\ v_c(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(V_c(s)\right)=10-10e^{-t/10}$$

Verificación:

$v_c(t) = 10 - 10e^{-t/10}$, luego $v_c'(t) = e^{-t/10}$

- Cumple $v_c(0) = 0$.
- Cumple $RCv'_c(t) + v_c(t) = 1010e^{-t/10} + 10 - 10e^{-t/10} = e(t)$.

- **Funciones Periódicas**:
  Ejercicio: Utilice la fórmula de funciones periódicas para calcular la transformada de Laplace de $f(t) = \begin{cases} 1 & t \in (2n, 2n+1) \\ 0 & t \in (2n+1, 2n) \end{cases}$
  donde *n* es un entero positivo, $n = 0,1,2,3...$

- **Teorema del valor final**: Observar la aplicación del teorema en el ejemplo anterior y en las funciones $f(t) = e^t$ y $f(t) = e^{-t}$. Calcule para ambas funciones los límites: $\lim_{t \to +\infty} f(t)$ y $\lim_{s \to 0} s\,F(s)$, ¿en cuál se verifica el teorema del valor final?

- **Teorema del valor inicial:** (Verificar en el ejemplo)