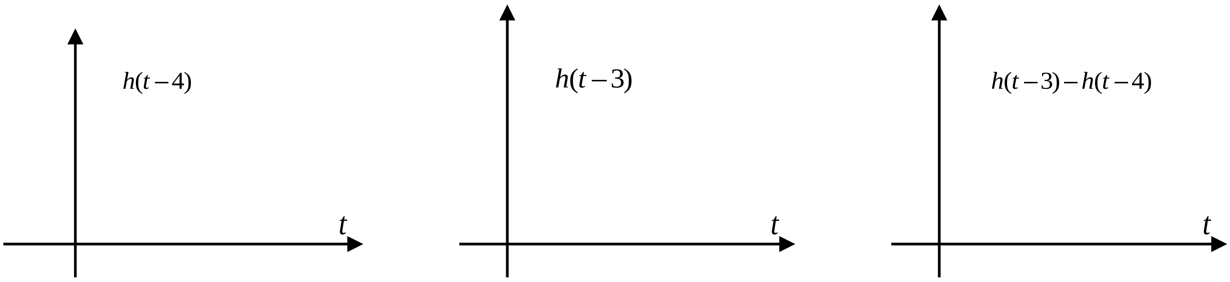
Funciones de Variable Compleja

Clase 27, 23 de octubre de 2019.

Ejercicio 1:

a) Funciones definidas por tramos. Función escalón. Grafique las funciones:



¿Cómo puede representar $f(t)=\begin{cases} 0 & t<3 \\ 2 & 3<t<4 \\ 0 & t>4 \end{cases}$ usando la función escalón? Luego transforme aplicando la propiedad de traslación.

b) Represente las siguientes funciones usando combinaciones de la función escalón y luego transforme aplicando la propiedad de traslación.

a) $f(t)=\begin{cases} 0 & t<2 \\ e^t & 2<t<3 \\ 0 & t>3 \end{cases}$ b) $f(t)=\begin{cases} 2 & t<1 \\ \cos(t) & 1<t<2 \\ e^t & t>2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} f(t) &= 2\left[1-h(t-1)\right]+\cos(t)\left[h(t-1)-h(t-2)\right]+e^t h(t-2) \\ &= 2-2h(t-1)+\cos(t)h(t-1)-\cos(t)h(t-2)+e^t h(t-2) \end{aligned}$$

Se puede interpretar a la función escalón como una llave "1: prende" y "0: apaga".

Más Propiedades y ejemplos: sea $F(s)=\mathcal{L}\left(f(t)\right)_{(s)}$ para $\operatorname{Re}(s)>p$

- **Cambio de escala**

para $a>0$ (real): $\boxed{\mathcal{L}\left(f(at)\right)_{(s)}=\frac{1}{a}\mathcal{L}\left(f(t)\right)_{\left(\frac{s}{a}\right)}=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)}$, $\operatorname{Re}(s)>p\,a$

Ejemplo: $\mathcal{L}\left(\operatorname{sen}(at)\right)_{(s)}=\frac{1}{a}\mathcal{L}\left(\operatorname{sen}(t)\right)_{\left(\frac{s}{a}\right)}=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)_{s\to\frac{s}{a}}=\frac{\frac{1}{a}}{\left(\frac{s}{a}\right)^2+1}=\frac{a}{s^2+a^2}$.

- **Derivada en *t***

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}\left(f'(t)\right)_{(s)} &= s\mathcal{L}\left(f(t)\right)_{(s)}-f(0) \\ &= sF(s)-f(0) \end{aligned}}, \qquad \operatorname{Re}(s)>p$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}\left(f''(t)\right)_{(s)} &= s^2\mathcal{L}\left(f(t)\right)_{(s)}-sf(0)-f'(0) \\ &= s^2F(s)-sf(0)-f'(0) \end{aligned}}, \qquad \operatorname{Re}(s)>p$$

Ejemplos:

a) Si $f(t)=\operatorname{senh} t$, $f'(t)=\cosh t$, y $f''(t)=\operatorname{senh} t=f(t)$, usando la propiedad 2,

$$\mathcal{L}(f''(t))_{(s)} = \mathcal{L}(\operatorname{senh} t)_{(s)} = s^2\mathcal{L}(\operatorname{senh} t)_{(s)} - s0 - 1$$

$$(1-s^2)\mathcal{L}(\operatorname{senh} t)_{(s)} = -1$$

$$\mathcal{L}(\operatorname{senh} t)_{(s)} = \frac{1}{s^2-1}$$

- **Derivada en *s***

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathcal{L}(t\, f(t))_{(s)} = -\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}(f(t))_{(s)}\right) = -F'(s) \\ \mathcal{L}(t^n\, f(t))_{(s)} = (-1)^n F^{(n)}(s)\end{array}}, \qquad \operatorname{Re}(s) > p$$

Ejemplos:

$$\mathcal{L}(t1)_{(s)} = -\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}(1)_{(s)}\right) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}$$

$$\therefore\ \mathcal{L}(t)_{(s)} = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}(t\, sen(t))_{(s)} = -\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}(sen(t))_{(s)}\right) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{2s}{s^2+1}$$

- **Integral en *t***

$$\boxed{\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right)_{(s)} = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t))_{(s)} = \frac{F(s)}{s}}, \qquad \operatorname{Re}(s) > \max\{p, 0\}$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t \operatorname{sen}(u)du\right)_{(s)} = \frac{1}{s}\mathcal{L}(\operatorname{sen}(u))_{(s)} = \frac{1}{s(s^2+1)}.$$

En este caso, como es sencillo resolver la integral:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t \operatorname{sen}(u)du\right)_{(s)} = \mathcal{L}\left(\cos(u)\Big|_0^t\right)_{(s)} = \mathcal{L}(1-\cos(t))_{(s)} = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

- **Integral en s.** (esta propiedad es conveniente aplicarla considerando que s es una variable real, o que se evalúa en el eje real, y luego extenderla por prolongación analítica a todo el semiplano, donde la transformada es analítica)

Si $\exists \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t)}{t}$, $\boxed{\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)_{(s)} = \int_s^\infty \mathcal{L}(f(t))_{(u)}\, du = \int_s^\infty F(u)du}$

Como $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$,

$$\mathcal{L}\left(\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\right)_{(s)} = \int_s^\infty \mathcal{L}(\operatorname{sen}(t))_{(u)}\, du = \int_s^\infty \frac{1}{u^2+1}du = \arctan(u)\Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan(s)$$

a) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right)_{(t)}$

- **Convolución**. **Propiedades.**

<u>Ejercicio</u>: Calcular usando convolución:

i) $e^{-t} * e^{-2t}$ ii) ¿$\mathcal{L}\left(e^{-t} * e^{-2t}\right)_{(s)} = \mathcal{L}\left(e^{-t}\right)_{(s)} \mathcal{L}\left(e^{-2t}\right)_{(s)}$?

iii) $h(t-1) * t$