Funciones de Variable Compleja

Clase 26, 21 de octubre de 2019.

Ejercicio 1: Calcule las siguientes integrales impropias, donde s es un parámetro complejo y t una variable real. (Observe para qué valores de s converge)

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}dt \qquad \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{it}dt \qquad \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{2t}dt$$

Transformada de Laplace. Definición 62 Ejemplos:

i) $\mathcal{L}(1)_{(s)} = \frac{1}{s}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$ ii) $\mathcal{L}\left(e^{it}\right)_{(s)} = \frac{1}{s-i}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$ iii) $\mathcal{L}\left(e^{2t}\right)_{(s)} = \frac{1}{s-2}$, $\mathrm{Re}(s) > 2$

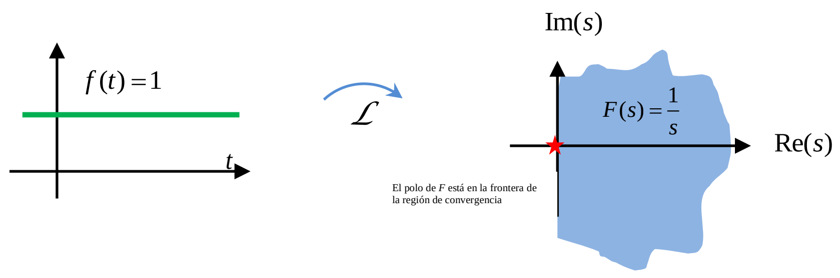
- Abscisa de convergencia. Definición 63 y 64.
- Orden exponencial. Definición 65
- Condiciones suficientes para la existencia de la T. de Laplace. Teorema 53.

Ejercicio 2: Diga si las siguientes funciones cumplen las condiciones suficientes para la existencia de la T. de Laplace. (Teorema 53). Si no las cumple, ¿puede tener transformada?

(a) $f(t) = sen(t)$ (b) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ (c) $f(t) = e^{t^2}$ (d) $f(t) = e^{it^2}$ [lema 5, pag. 59]

Recordar:

a. Condiciones suficientes para la existencia de la T. de Laplace. Teorema 53.
b. F(s) es analítica en la región de convergencia. Teorema 54.



Las funciones en (b) y (c) no cumplen las condiciones suficientes de existencia, sin embargo en un caso tiene Transformada de Laplace y en el otro no.

Ejercicio 2: Sea f continua a tramos y acotada por una exponencial $|f(t)| \le Me^{\alpha t}$, $\forall t \ge 0$.

a) muestre que la transformada $\mathcal{L}\left(f(t)\right)_{(s)} = F(s)$ existe cuando $\mathrm{Re}(s) > \alpha$

b) muestre que: $\lim\limits_{\substack{\mathrm{Re}(s)\to+\infty \\ \mathrm{Im}(s)=0}} F(s) = 0$ (Teorema 56)

Ejercicio 3. Función de Heaviside o escalón unitario: $h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$. Encuentre las transformadas de Laplace, por definición, de las siguientes funciones y sus respectivas abscisas de convergencia.

a) $\mathcal{L}\left(h(t)\right)_{(s)} =$

b) $\mathcal{L}\left(e^{2t}h(t)\right)_{(s)} =$

- **Transformada inversa. (Unicidad--Condición necesaria) Teorema 56**. Ejemplos sin antitransformada ¿ $\mathcal{L}^{-1}(1)_{(s)}$ $\exists$?.

Ejercicio 4: Calcule por definición $\mathcal{L}\left(g(t)\right)_{(s)} =$ donde $g(t)=\begin{cases} 1 & t\neq 5 \\ 3 & t=5 \end{cases}$

¿ $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s}\right)=1$, ó $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s}\right)=h(t)$, ó $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s}\right)=g(t)$?

Transformada inversa. Teorema de Lerch. Unicidad. Ver ejercicio anterior b).

- **Propiedades:**

sea $F(s)=\mathcal{L}\left(f(t)\right)_{(s)}$ para $\operatorname{Re}(s)>p$, y $G(s)=\mathcal{L}\left(g(t)\right)_{(s)}$ para $\operatorname{Re}(s)>q$,

- **Linealidad:** para todo α,β complejos

$$\mathcal{L}\left(\alpha f(t)+\beta g(t)\right)_{(s)} = \alpha\mathcal{L}\left(f(t)\right)_{(s)}+\beta\mathcal{L}\left(g(t)\right)_{(s)}$$
$$=\alpha F(s)+\beta G(s) \qquad \operatorname{Re}(s)>\max\{p,q\}$$

- **Traslación:**

para α complejo: $\mathcal{L}\left(e^{\alpha t}f(t)\right)_{(s)}=\mathcal{L}\left(f(t)\right)_{(s-\alpha)}=F(s-\alpha)$, $\qquad \operatorname{Re}(s)>p+\operatorname{Re}(\alpha)$

para $a>0$ (real): $\mathcal{L}\left(h(t-a)f(t-a)\right)_{(s)}=e^{-as}\mathcal{L}\left(f(t)\right)_{(s)}=e^{-as}F(s)$, $\qquad \operatorname{Re}(s)>p$

Ejemplos:

a) $\mathcal{L}\left(e^{2t}.1\right)_{(s)}=\mathcal{L}\left(1\right)_{(s-2)}=\dfrac{1}{s-2}$, $\operatorname{Re}(s)>2$

b) $\mathcal{L}\left(e^{-it}.1\right)_{(s)}=\mathcal{L}\left(1\right)_{(s-(-i))}=\dfrac{1}{s+i}$, $\operatorname{Re}(s)>0$.

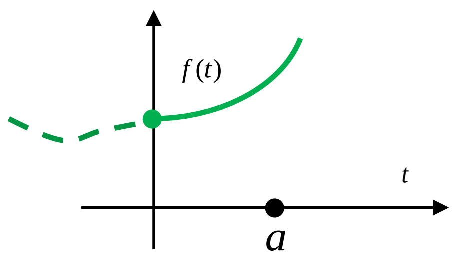
c) $\mathcal{L}\left(sen(t)\right)_{(s)}=\mathcal{L}\left(\dfrac{1}{2i}e^{it}-\dfrac{1}{2i}e^{-it}\right)_{(s)}=\dfrac{1}{2i}\mathcal{L}\left(e^{it}\right)_{(s)}-\dfrac{1}{2i}\mathcal{L}\left(e^{-it}\right)_{(s)}$

$$=\frac{1/2i}{s-i}-\frac{1/2i}{s+i}=\frac{1}{s^2+1}; \qquad \operatorname{Re}(s)>0$$

Otros ejemplos:

(a) $\mathcal{L}\left(\cos(t)\right)_{(s)}=\mathcal{L}\left(\dfrac{1}{2}e^{it}+\dfrac{1}{2}e^{-it}\right)_{(s)}=\dfrac{1}{2}\mathcal{L}\left(e^{it}\right)_{(s)}+\dfrac{1}{2}\mathcal{L}\left(e^{-it}\right)_{(s)}$

$$=\frac{1/2}{s-i}+\frac{1/2}{s+i}=\frac{s}{s^2+1}; \qquad \operatorname{Re}(s)>0$$



(b) $\mathcal{L}\left(h(t-2)e^{(t-2)}\right)_{(s)} = e^{-2s}\mathcal{L}\left(e^{t}\right)_{(s)} = \dfrac{e^{-2s}}{s-1}$; $\mathrm{Re}(s) > 1$. (observe los gráficos de la función desplazada y sin despalazar)

(c) $\mathcal{L}\left(h(t-2)e^{t}\right)_{(s)} = \mathcal{L}\left(h(t-2)e^{t-2+2}\right)_{(s)} = e^{-2s}\mathcal{L}\left(e^{t+2}\right)_{(s)} = e^{-2s}\mathcal{L}\left(e^{t}e^{2}\right)_{(s)} = \dfrac{e^{2}e^{-2s}}{s-1}$; $\mathrm{Re}(s) > 1$

De otra forma:

$$\mathcal{L}\left(h(t-2)e^{t}\right)_{(s)} = \mathcal{L}\left(h(t-2)\right)_{(s-1)} = \left(e^{-2s}\mathcal{L}(1)\right)_{(s-1)} = \left(e^{-2s}\frac{1}{s}\right)_{(s-1)} = \frac{e^{-2(s-1)}}{s-1};\ \mathrm{Re}(s) > 1$$

(d) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{e^{-3s}}{(s+i)}\right)_{(t)} = h(t-3)\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s+i}\right)_{(t-3)} = h(t-3)e^{-i(t-3)}$.

(e) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{(s-3)^2+1}\right)_{(t)} = e^{3t}\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2+1}\right)_{(t)} = e^{3t}\,\mathrm{sen}(t)$; $\mathrm{Re}(s) > 3$.