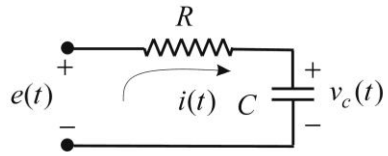
Funciones de Variable Compleja

Clase 25, 16 de octubre de 2019.

Ejercicio 1: **Aplicaciones de Series de Potencias en análisis de circuitos.**

La ecuación diferencial $e(t) = RCv'_c(t) + v_c(t)$



surge de plantear las leyes de Kirchhoff en el circuito RC serie , donde $v_c(t)$ es la tensión en bornes del capacitor, y $RC = 10seg$.

a) Encuentre el potencial en bornes del capacitor en función del tiempo $v_c(t)$, sabiendo que la tensión inicial del capacitor es: $v_c(0) = 0$ volts y la excitación es: $e(t) = 10$ volts .

b) Encuentre el potencial en bornes del capacitor, si se considera que la resistencia varía con el tiempo $R = 200\ 10^3 (1 + 0.1t)\Omega$, y el resto de condiciones se mantienen igual al caso anterior.

Solución: a) Se propone una solución: $v_c(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, que tendrá una región de convergencia en un intervalo centrado en $t = 0$, luego en ese intervalo se puede derivar término $v'_c(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n t^{n-1}$, por la condición inicial se debe cumplir que: $v_c(0) = 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n 0^n = a_0 = 0$. Es decir ya se conoce el primer coeficiente de la serie, reemplazando en la ecuación diferencial se pueden obtener el resto de los coeficientes en forma recursiva: $e(t) = RCv'_c(t) + v_c(t)$

$$10 = 10\sum_{n=1}^{+\infty} na_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 10(n+1)a_{n+1} t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

$$0 = -10 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(10(n+1)a_{n+1} + a_n\right)t^n = \left(-10 + 10a_1 + a_0\right) + \left(10.2.a_2 + a_1\right)t + \left(10.3.a_3 + a_2\right)t^2 + \cdots$$

Por ser una igualdad de series de potencias, los coeficientes son únicos, y en el primer miembro todos los coeficientes son nulos, por lo tanto:

para $n = 0$, $\quad 0 = -10 + 10a_1 + a_0 \Rightarrow a_1 = \dfrac{10 - a_0}{10} = \dfrac{10}{10} = 1$.

para $n = 1$, $\quad 0 = 10.2.a_2 + a_1 \Rightarrow a_2 = \dfrac{-a_1}{2.10} = -\dfrac{1}{2.(-10)}$

para $n = 2$, $\quad 0 = 10.3.a_3 + a_2 \Rightarrow a_3 = \dfrac{-a_2}{3.10} = -\dfrac{1}{2.3.(-10)(-10)}$

para $n > 2$, $\quad 0 = 10.(n+1).a_{n+1} + a_n \Rightarrow a_{n+1} = \dfrac{-a_n}{(n+1).10}$, luego $\quad a_n = \dfrac{1}{n!.(-10)^{n-1}}$

y ajustando la condición inicial: $a_0 = 0$

por lo tanto: $v_c(t) = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n!.(-10)^{n-1}} t^n = 10\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{-(-0.1t)^n}{n!.} = 10\left(1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-0.1t)^n}{n!.}\right)$

luego como la suma de la serie es conocida (exponencial), y la región de convergencia es para toda la recta real, $-\infty < t < +\infty$:

$$\boxed{v_c(t) = 10 - 10.e^{-0.1t}}$$

(observe que verifica la condición inicial y si derivamos podemos verificar la ecuación diferencial)

a) En este caso: $RC = 10 + t\ seg.$, reemplazando en la ecuación diferencial

$$10 = (10+t)\sum_{n=1}^{+\infty} na_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 10(n+1)a_{n+1} t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} na_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(10a_{n+1} + a_n)t^n$$

Igualando coeficientes:

para $n=0$, $\quad 10 = 10a_1 + a_0 \Rightarrow a_1 = \dfrac{10-a_0}{10} = \dfrac{10}{10} = 1.$

para $n=1$, $\quad 0 = 2(10a_2 + a_1) \Rightarrow a_2 = \dfrac{-a_1}{10} = -\dfrac{1}{(-10)}$

para $n=2$, $\quad 0 = 3(10a_3 + a_2) \Rightarrow a_3 = \dfrac{-a_2}{10} = \dfrac{1}{(-10)(-10)}$

luego para $n > 2$ $\quad a_n = \dfrac{1}{(-10)^{n-1}}$

y ajustando la condición inicial: $a_0 = 0$.

Por lo tanto: $v_c(t) = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(-10)^{n-1}} t^n = -10\sum_{n=1}^{+\infty} (-0.1t)^n$

Luego como la suma de la serie es conocida (geométrica), con región de convergencia $-10 < t < +10$, y función suma:

$$\boxed{v_c(t) = \frac{t}{1+0.1t}}$$

(Observar que esta función extiende la solución para $t > 10$, el radio de convergencia es menor pues tiene una singularidad en $t = -10$, verificar el valor inicial, $t = 0$ y valor final $t \to \infty$)

Ejercicio 2:

Desarrollar en series de potencias las siguientes funciones en las regiones indicadas:

a) $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$ en $\sqrt{2} < |z-i|$ $\qquad \dfrac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n, \quad |w| < 1$

b) $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$ en $0 < |z-1| < \infty$ $\qquad e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{w^n}{n!}, \quad |w| < \infty$

c) $f(z) = \dfrac{e^{z-i} - 1}{z-i}$ en $0 < |z-i| < \infty$ $\qquad \operatorname{sen}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{w^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |w| < \infty$

d) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^5}$ en $0 < |z| < \infty$

¿Cuál de los desarrollos anteriores sirve para clasificar los puntos singulares de la función?
Ejercicio de la guía: 15.1 (pag 32)

Ejercicio 3: Considere el argumento principal definido: $-\pi < \operatorname{Arg}(z) \le \pi$

a) Sea $f(z)$, una rama de la función multivaluada $(z+i)^i$ tal que $f(0) = e^{\frac{3\pi}{2}}$.
Evalúe $f(i) =$

b) ¿Dónde es analítica la función $f(z)$ encontrada en b)? Calcule su derivada. [observe la composición de funciones analíticas]

c) Indique si las siguientes igualdades son siempre ciertas:

i. $\quad (z+i)^i = e^{i\operatorname{Log}(z+i)}$

ii. $d\dfrac{\left(e^{i\,\mathrm{Log}(z+i)}\right)}{dz}=\dfrac{ie^{i\,\mathrm{Log}(z+i)}}{(z+i)}$

iii. $d\dfrac{\left((z+i)^{i}\right)}{dz}=i(z+i)^{i-1}=\dfrac{i(z+i)^{i}}{(z+i)}=\dfrac{ie^{i\,\mathrm{Log}(z+i)}}{(z+i)}=ie^{(i-1)\mathrm{Log}(z+i)}$

Ejercicios de Coloquios:

1. Sea $S(z)$ la función suma de $\sum_{0}^{\infty} a_n z^n$, definida en la región de conv. $|z|<10$.

i. ¿ La serie numérica $\sum_{0}^{\infty}|a_n|5^n$ es convergente?

ii. Usando el criterio de Weierstrass, muestre que la serie converge uniformemente a $S(z)$ en la región $|z|\le 5$.

iii. ¿ $S(z)$ es continua? ¿se puede derivar e integrar término a término?

iv. Calcule la integral sobre una curva cerrada arbitraria contenida dentro de la región de convergencia. Usando el teorema de Morera, muestre que $S(z)$ es analítica en $|z|<R$.

v. Haciendo un corrimiento de variable esto se generaliza para cualquier centro $z_0 \neq 0$, con la sustitución de $z \to z - z_0$.

2. Enuncie y demuestre el *teorema de los residuos*.

3. Si z_0 es un polo de orden *m* de $f(z)$, muestre que la función $g(z)=f(z)(z-z_0)^m$ tiene una singularidad evitable en z_0.¿Qué valor debería tomar $g(z_0)$ para que *g* sea analítica en z_0?

4. Muestre que si *f* tiene un cero de orden *m* en z_0, entonces $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ tiene un polo simple en z_0, calcule su residuo

5. Muestre que si *f* tiene un polo de orden *m* en z_0, entonces $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ tiene un polo simple en z_0, calcule su residuo

6. Sea *f* una función de variable compleja continua en un dominio simplemente conexo *D*. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas dando una justificación correspondiente:

a) *Si f* es derivable en *D*, entonces *f* tiene primitiva en *D*.

b) Si *f* tiene primitiva en *D* entonces $\int_C f(z)dz=0$ para todo contorno cerrado *C* contenido en *D*.

c) Si $\int_C f(z)dz=0$ para todo contorno cerrado *C* contenido en $D \Rightarrow f$ es analítica en D.