# Funciones de Variable Compleja

## Clase 24, 11 de octubre de 2019.

Ejercicio 1: Encuentre y clasifique todos los puntos singulares de $f(z)=\dfrac{z^2}{\operatorname{sen}(z)}$

Ejercicio 2: **Teorema de los Residuos.** Si es posible calcule las integrales utilizando residuos:

$$\int_{|z-\pi|=6} \frac{z^2}{\operatorname{sen}(z)}dz = \qquad\qquad \int_{|z|=2} \frac{1}{z(z-1)}dz =$$

Ejercicio 3: Considere que $S(z)$ es la función suma de $\sum_0^\infty a_n(z-z_0)^n$ en el disco $|z-z_0|<R$.

a) Justifique por qué es cierto que $\lim_{z\to z_0} S(z)=S(z_0)=a_0$

b) Derive término a término (teorema 45), observe los valores de $S(z_0)$, $S'(z_0)$, $S''(z_0)$, $S'''(z_0)$, … en función de los coeficientes de la serie, y encuentre una expresión para $S^{(n)}(z_0)$.

- De este resultado es inmediata la deducción de la unicidad de los coeficientes de los desarrollos en series de potencias, pues son los coeficientes de Taylor de $S(z)$.

Ejercicio 4:

(a) Sean *f* y *g* dos funciones analíticas en $z_0$ ambas un cero simple en $z_0$, expréselas en series de Taylor, cómo puede usar estos desarrollos para obtener los desarrollos de Taylor de sus derivadas. Use estos desarrollos para calcular los límites: $\lim_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}$ y $\lim_{z\to z_0}\dfrac{f'(z)}{g'(z)}$, ¿cómo serían los resultados estos límites si las funciones tienen ceros de diferentes órdenes? ¿Vale la regla de L'Hopital?

- **Regla de L'Hopital.** Límite del cociente de funciones analíticas cuando *z* tiende a un cero común a ambas funciones.

- Los ceros son aislados (salvo en la función nula).
  - ¿ *f* tiene un cero de orden *m* en $z_0 \Leftrightarrow 1/f$ tiene un polo de orden *m* en $z_0$ ?
  - Teorema 50. Teorema 51. Ejercicio 24. 1 (pag. 54)

    Ejemplo: Si $f(z)=\operatorname{sen}^2(z)+\cos^2(z)$ y $g(z)=1$, que son funciones enteras, y verifican sobre el eje real ($z=x$), que $f(z)=g(z)$, es decir $\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)=1$, ¿puede asegurarse que vale $\operatorname{sen}^2(z)+\cos^2(z)\equiv 1$ en todo el plano?

Ejercicio 5 (pag.38, Ej.18, con $z_0=0$)

Sea *f* una función analítica en el disco $|z|<R_0$. Sea *c* la curva parametrizada: $s(t)=r_0e^{it}$, $0\le t\le 2\pi$, con $r_0<R_0$. Sea *z* un punto interior a la curva *c*.

a) Realice un gráfico con el disco $|z|<R_0$, la curva *c* y el punto *z*.

b) Muestre que : $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_c \frac{f(s)}{s-z}ds$ [Teorema 32]

c) Muestre que : $f\left(z\right)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_c \frac{f(s)}{s}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{s}}\right)ds$ [factor común $1/s$]

d) Muestre que : $\dfrac{1}{1-w}=1+w+\cdots+w^N+\dfrac{w^{N+1}}{1-w}$ [Serie geométrica, suma parcial y resto]

e) Muestre que : $f\left(z\right)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_c \frac{f(s)}{s}\left(1+\frac{z}{s}+\cdots+\left(\frac{z}{s}\right)^N+\frac{\left(\frac{z}{s}\right)^{N+1}}{1-\left(\frac{z}{s}\right)}\right)ds$

f) Muestre que : $f\left(z\right)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_c \frac{f(s)}{s}ds+\frac{z}{2\pi i}\int_c \frac{f(s)}{s^2}ds+\cdots+\frac{z^N}{2\pi i}\int_c \frac{f(s)}{s^{N+1}}ds+\rho_N(z)$

donde $\rho_N(z)=\displaystyle\int_c \frac{f(s)z^{N+1}ds}{2\pi i(s-z)s^{N+1}}$

g) Muestre que : $f\left(z\right)=f(0)++\cdots+\dfrac{f^{(N)}(0)}{N!}z^N+\rho_N(z)$ [Teorema 32]

h) Muestre que : $\left|\rho_N(z)\right|\le\dfrac{r_0F}{(r_0-r)}\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^{N+1}$ donde $\left|s\right|=r_0$ , $\left|z\right|=r$ y $\left|f(s)\right|\le F$ sobre la curva *c*.

[use $\left|\displaystyle\int_c \frac{f(s)z^{N+1}ds}{2\pi i(s-z)s^{N+1}}\right|\le M.L$ ]

i) $\lim\limits_{N\to\infty}\rho_N(z)=0$, luego $f\left(z\right)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$ [Se probó el **Teorema de Taylor** para $z_0=0$ ]