Funciones de Variable Compleja

Clase 23, 9 de octubre de 2019.

Ejercicio 1: Clasifique los puntos singulares de las siguientes funciones utilizando límites:

a) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ b) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$ c) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^3}$

Ejercicio 2: **Teorema de los Residuos.** Si es posible, calcule las integrales utilizando residuos:

$$\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz = \qquad \int_{|z|=1} \frac{e^z - 1}{z} dz = \qquad \int_{|z|=1} \frac{e^z - 1}{z^3} dz =$$

Ejercicio 3: Desarrolle en serie de Laurent en las regiones indicadas:

a) $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $0 < |z| < \infty$

b) $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$, $|z| < 1$

c) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$, $0 < |z| < 1$

d) $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $|z-1| < 1$

e) $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$, $0 < |z-1| < \infty$

f) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$, $0 < |z-1| < 1$

Ejercicio 4: Sea $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)} = \dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z}$. Grafique todas las posibles regiones de convergencia de los desarrollos de la función $f(z)$ en Series de Laurent, centrados en $z_0 = 2$.

Desarrollar en la región $1 < |z-2| < 2$

Ejercicio 5: Clasifique los puntos singulares de la función del ejercicio 4. Encuentre los residuos en cada punto singular. Calcule las siguientes integrales usando residuos

$$\int_{|z|=0.5} \frac{1}{z(z-1)} dz = \qquad \int_{|z-2|=1.5} \frac{1}{z(z-1)} dz =$$

Ejercicio 4: Descomponga en fracciones simples, usando la fórmula para los coeficientes b_k:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{A}{z-1} - \frac{B}{z}$$

Coeficientes para el polo simple en $z_0 = 1$, de orden m=1

(k=1) $\quad A = b_1 = \dfrac{1}{(1-1)!} \lim_{z \to 1} \dfrac{d^{1-1}}{dz^{1-1}} \left[(z-1) f(z) \right] = \lim_{z \to 1} \left(\dfrac{1}{z} \right) = 1$

Coeficientes para el polo simple en $z_0 = 0$, de orden m=1

(k=1), $\quad B = b_1 = \lim_{z \to 0} \left[(z-0) f(z) \right] = \lim_{z \to 0} \dfrac{1}{z-1} = -1$

Por lo tanto $\quad f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)} = \dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z}$