Funciones de Variable Compleja

Clase 22, 7 de octubre de 2019.

Ejercicio 1: La función $\dfrac{e^z - 1}{\operatorname{sen}(z)}$ ¿tiene un punto singular en $z_0 = 0$? ¿Tiene otros puntos singulares?

Ejercicio 2: ¿*Es posible clasificar los puntos singulares sin usar series de Laurent*?

a) Si es z_0 un punto singular evitable de f $\Rightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \lim\limits_{z\to z_0}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n\right) = a_0$. Se puede redefinir la función para que sea analítica en z_0, definiendo: $f(z_0) = a_0$ y el residuo es nulo es decir: $b_1 = \operatorname*{Res}_{z=z_0}\left(f(z)\right) = 0$.

b) Polos de orden m. Muestre que : Si f tiene un polo de orden m en z_0, entonces puede expresarse como $f(z) = \dfrac{\Phi(z)}{(z-z_0)^m}$, donde Φ es analítica en z_0 y $\Phi(z_0) \neq 0$. Luego $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$. Por lo tanto:

- z_0 es polo de orden m de f $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z) = \begin{cases} \infty & k < m \\ \Phi(z_0) \neq 0 & k = m \\ 0 & k > m \end{cases}$.
- Fórmulas para los coeficientes (b_k) de la parte principal (Lema3, pag.44-45)

$$b_k = \frac{1}{(m-k)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-k}}{dz^{m-k}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right].$$

Por lo tanto el residuo:

$$b_1 = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right].$$

Y si el polo es simple, $m = 1$:

$$b_1 = \lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0) f(z)\right].$$

c) Si es z_0 un punto singular esencial de f, no existe el $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, el residuo no se puede calcular usando límites, en cambio sí se puede calcular observando el coeficiente b_1 de la serie de Laurent de f en un entorno reducido de z_0 ó resolviendo la integral, pero esto último generalmente es más complicado.

Resumiendo: se pueden clasificar los puntos singulares calculando límites:

a. z_0 un punto singular evitable de f $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ es finito.

b. z_0 un punto singular polo de f $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ es infinito.

c. z_0 un punto singular esencial de f $\Leftrightarrow$ no existe $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$

Ejercicio 3: Sea $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ en $0<|z|<\infty$, observe que tiene un punto singular esencial (recuerde su desarrollo: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$). Interprete el **Teorema de Picard** en un entorno del punto singular y muestre que no existe $\lim_{z\to z_0} f(z)$.

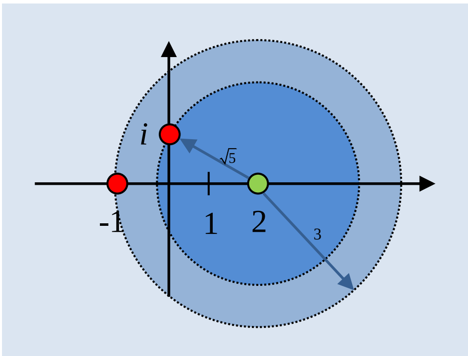
$$\int_{|z|=1}\frac{e^z-1}{\operatorname{sen}(z)}dz= \qquad\qquad \int_{|z-\pi|=4}\frac{e^z-1}{\operatorname{sen}(z)}dz=$$

Ejercicio 4: Descomponga en fracciones simples:

$$f(z)=\frac{z+3i}{z(z-i)(z+1)^2}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-i}+\frac{C}{z+1}+\frac{D}{(z+1)^2}$$

Rta. $f(z)=\frac{-3}{z}+\frac{-2i}{z-i}+\frac{3+2i}{z+1}+\frac{1+2i}{(z+1)^2}$

Ejemplo desarrollado: Sea $f(z)=\frac{z}{(z+1)(z-i)}$, encuentre el desarrollo en a $\sqrt{5}<|z-2|<3$



Para comenzar separamos en fracciones simples:

$$f(z)=\frac{z}{(z+1)(z-i)}=\frac{\frac{1-i}{2}}{z+1}+\frac{\frac{1+i}{2}}{z-i}$$

A continuación encontramos un desarrollo para el primer término, desplazamos el centro sumando y restando z0, luego sacamos factor común adecuadamente y utilizamos el desarrollo de serie geométrica

$$\frac{1}{1-w}=\sum_{n=0}^{\infty}w^n, \quad |w|<1:$$

$$\frac{\frac{1-i}{2}}{z+1}=\frac{\frac{1-i}{2}}{z-2+2+1}=\frac{\frac{1-i}{2}}{z-2+3}$$

$$=\frac{1-i}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{z-2}{3}+1\right)}=\frac{1-i}{6}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z-2}{3}\right)}=\frac{1-i}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{1-i}{6}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{3^n}$$

Converge cuando $|w|=\left|-\frac{z-2}{3}\right|<1$, es decir: $|z-2|<3$

Con el segundo término procedemos en forma similar, en este caso sólo cambiamos el factor común, z-z0, para que esta expresión quede en el denominador de la región, así la región de convergencia es el exterior de un círculo:

$$\frac{\frac{1+i}{2}}{z-i}=\frac{\frac{1+i}{2}}{z-2+2-i}=\frac{1+i}{2}\cdot\frac{1}{(z-2)}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{2-i}{z-2}\right)}=\frac{1+i}{2}\cdot\frac{1}{(z-2)}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{2-i}{z-2}\right)}$$

$$=\frac{1+i}{2}\cdot\frac{1}{(z-2)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2-i}{z-2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+i}{2}(-1)^n\frac{(2-i)^n}{(z-2)^{n+1}}$$

Este último desarrollo converge cuando $|w|=\left|-\frac{2-i}{z-2}\right|<1$, es decir: $|z-2|>\sqrt{5}$.

Sumando ambos términos, la región de convergencia es al menos la intersección:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{1-i}{6}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{3^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{1+i}{2}(-1)^n\frac{(2-i)^n}{(z-2)^{n+1}} \quad \text{en} \quad \sqrt{5}<|z-2|<3.$$