Funciones de Variable Compleja

Clase 21, 4 de octubre de 2019.

<u>Ejercicio 1</u>: Usar $e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}, \ |w| < \infty$ para desarrollar en series de Taylor las funciones:

a) $f(z) = e^z - 1$ en $|z| < \infty$. b) $f(z) = z^2\left(e^z - 1\right)$ en $|z| < \infty$.

<u>Ejercicio 2</u>: Considere que $S(z)$ es la función suma de $\sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ en el disco $|z - z_0| < R$. Derive término a término (teorema 45), observe los valores de $S(z_0)$, $S'(z_0)$, $S''(z_0)$, $S'''(z_0)$, … en función de los coeficientes de la serie, y encuentre una expresión para $S^{(n)}(z_0)$.

- De este resultado es inmediata la deducción de la unicidad de los coeficientes de los desarrollos en series de potencias, pues son los coeficientes de Taylor de $S(z)$.

Definición 60. Ceros de funciones analíticas. ¿ $z_0 = 0$ es un cero de las funciones del ejercicio anterior? ¿de qué orden?

- Los ceros son aislados (salvo en la función nula).

<u>Ejercicio 3</u>: Sea f una función analítica en un disco centrado en z_0 con un **cero** de orden m en z_0.

a) Exprese en forma genérica, el desarrollo de Taylor válido en un entorno de z_0.

$$f(z) = 0 + 0\left(z - z_0\right) + 0\left(z - z_0\right)^2 + \cdots + \frac{f^{(m)}_{(z_0)}}{m!}\left(z - z_0\right)^n + \cdots = \sum_{n=m}^{\infty} a_n \left(z - z_0\right)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}_{(z_0)}}{n!}$$

a) Saque factor común $(z - z_0)^m$ en el desarrollo de Taylor expresado en a) y muestre que $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, donde $g(z)$ es la función suma de una serie de potencias positivas centrada en z_0.

$$f(z) = \left(z - z_0\right)^m \sum_{n=m}^{\infty} a_n \left(z - z_0\right)^{n-m} = \left(z - z_0\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} \left(z - z_0\right)^n = \left(z - z_0\right)^m g(z)$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} \left(z - z_0\right)^n$$

b) Muestre que g es analítica en z_0 y $g(z_0) \neq 0$.

$$g(z_0) = a_m + a_{m+1}\left(z_0 - z_0\right) + a_{m+2}\left(z_0 - z_0\right)^2 + \cdots$$

$$= a_m + 0 + 0 + \cdots = a_m = \frac{f^{(m)}_{(z_0)}}{m!} \neq 0$$

Ejercicio 3: Calcule el siguiente límite, desarrollando en series de Taylor (numerador y denominador), y usando la regla de L'Hopital:

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{\operatorname{sen}(z)}=$$

[Sug. desarrolle en series de Taylor (numerador y denominador), ¿podría usar la regla de L'Hopital]

Ejercicio 4: Usar $e^w=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!},\ |w|<\infty$ para desarrollar en series de Laurent las funciones:

b) $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ en $0<|z|<\infty$ b) $f(z)=\frac{e^z-1}{z}$ en $0<|z|<\infty$ c) $f(z)=\frac{e^z-1}{z^3}$ en $0<|z|<\infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-3}}{n!}$$

Punto singular aislado. **Residuos** Clasificación. Parte analítica y parte principal. Def. 57 y 58.

Ejercicio 3: Clasifique los puntos singulares de las funciones del ejercicio 3. Encuentre los residuos en cada punto singular. Calcule las siguientes integrales usando residuos

$$\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}}dz= \qquad \int_{|z|=1}\frac{e^z-1}{z}dz= \qquad \int_{|z|=1}\frac{e^z-1}{z^3}dz=$$