Funciones de Variable Compleja

Clase 19, 2 de octubre de 2019.

Ejercicio 2: Si es posible, desarrolle en serie de Taylor en las regiones indicadas:

a) $f(z)=z^2,\ |z|<\infty$ b) $f(z)=\dfrac{1}{z}$, $0<|z|<\infty$

c) $f(z)=\dfrac{1}{z}$, $|z-1|<1$ d) $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$, $0<|z-1|<1$

Ejercicio 2: A partir del desarrollo $\dfrac{1}{1-w}=\sum_{n=0}^{\infty} w^n$ en $|w|<1$, desarrollar en series de potencias las función $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ en $|z-i|<\sqrt{2}$

$$f(z)=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-z+i-i}=\frac{1}{(1-i)-(z-i)}=\frac{1}{(1-i)}\left(\frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}}\right) \quad \text{si } w=\frac{z-i}{1-i}$$

$$f(z)=\frac{1}{(1-i)}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}\text{, converge cuando } |w|=\left|\frac{z-i}{1-i}\right|<1 \ \therefore |\ z-i|<\sqrt{2}$$

Ejercicio 5: Sea $S(w)$ la función suma de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ y $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=R$ representa una función analítica en $|w|<R$ muestre que:

a) ¿Cuál es la región de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$?¿y el dominio de definición de la función $S(w)$?

b) Evalúe $S(0)$ y $\lim_{w\to 0} S(w)$

c) Muestre que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ representa una función analítica $S(z-z_0)$ en $|z-z_0|<R$.

d) Muestre que $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{(z-z_0)^n}$ representa una función analítica $S\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ en $|z-z_0|>\dfrac{1}{R}$.

Observar que:

- *Las series con todas potencias negativas convergen en el exterior de un círculo.*
- *La series de potencias positivas siempre convergen en el centro z0, el radio R va desde cero(cuando sólo converge en el punto z0, a infinito, cuando converge en todo el plano.*
- **Series de Laurent.** Teorema 47.
- La función $f(z)=\dfrac{1}{z}$, si bien no se puede desarrollar en serie de Taylor en $0<|z|<\infty$, sí admite un desarrollo en Serie de Laurent, y en este caso, el desarrollo tiene sólo un término no nulo: $f(z)=\dfrac{1}{z}$, pues la función ya es una potencia de z (negativa).

Ejercicio 6: Desarrollar en series de potencias , la función $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$, en la región $|z|<1$ y en la región $|z|>1$. [en $|z|>1$, $f(z)=\dfrac{1}{-z}\left(\dfrac{1}{1-z^{-1}}\right)$, luego use $\dfrac{1}{1-w}=\sum_{n=0}^{\infty} w^n$, $|w|<1$]

Punto singular aislado. **Residuos** Clasificación. Parte analítica y parte principal. Def. 57 y 58.

<u>Ejercicio 7</u>: Clasifique los puntos singulares de las funciones:

a) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ b) $f(z) = e^{\frac{1}{z-i}}$

Encuentre los residuos en cada punto singular y calcule las siguientes integrales usando residuos

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\,dz = \qquad\qquad \int_{|z|=2} e^{\frac{1}{z-i}}\,dz =$$