Funciones de Variable Compleja

Clase 1, 12 de agosto de 2019.

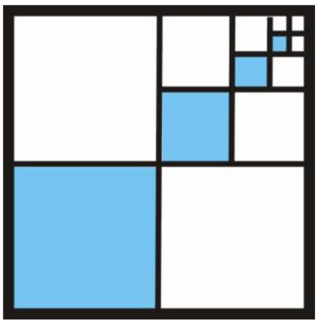
- Repaso de sucesiones, series numéricas, e integrales impropias. Definiciones 1,2 y 3. (series, sumas parciales, convergencia). Teorema 1. Condición necesaria. Series con términos positivos. Criterios de Comparación, D'Alambert, Cauchy. Convergencia absoluta y condicional. Teorema 4. Criterio de la integral-Series P- Criterio de Leibniz

Actividad 1: Nos presentamos: Numerarse y a continuación decimos nuestro nombre, ejemplo: 1-Guillermo; 2-Pablo; …
Armamos una sucesión de nombres, o de alumnos.

Actividad 2: El ejemplo de la cuerda, sucesión de notas, frecuencias y segmentos

Actividad 3: ¿$0.\widehat{9}=1$? Construya una sucesión que converja a $0.\widehat{9}$

Actividad 4: Un Ejemplo Geométrico

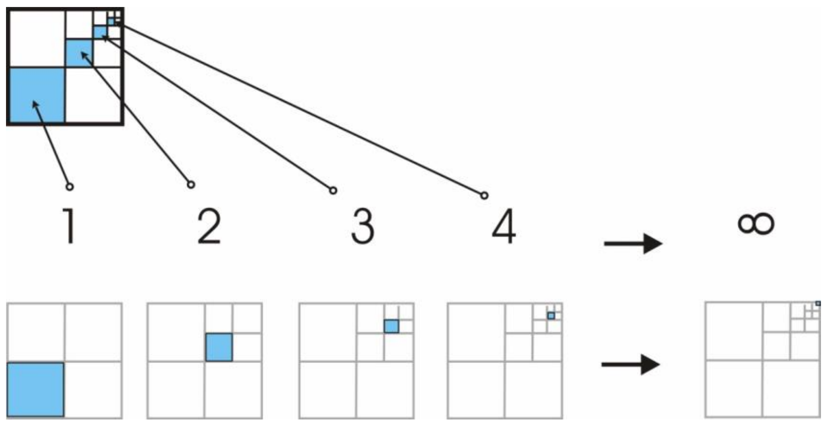


Dado un cuadrado inicial (de lado unitario), sigamos el siguiente procedimiento:

- Dividimos el cuadrado en cuatro partes (a través de sus medianas).
- Pintamos el cuadrado interior de la esquina inferior izquierda.
- Tomamos el cuadrado interior de la esquina superior derecha y volvemos al primer paso.

Agruparse de 2, 3 o 4 alumnos e identificar distintas sucesiones en el procedimiento anterior.
Por ejemplo :

- En cada paso se ha asignado (pintado) un cuadrado. De esta forma se indica un orden, una sucesión de cuadrados:



- ¿es convergente? ¿podemos decir que los cuadrados tienden al vértice superior derecho del cuadrado inicial, a pesar de que este punto no ha sido pintado en ninguno de los pasos?(ideas de distancia, *entornos*, cercanías, *límite*)
- En cada paso también podemos considerar el lado o el área de cada cuadrado pintado, y ahora tenemos una sucesión de números reales:
  Sucesión de lados:

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{8} \qquad \frac{1}{16} \qquad \cdots \qquad \frac{1}{2^n}$$

Sucesión de áreas:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \qquad \left(\frac{1}{4}\right)^2 \qquad \left(\frac{1}{8}\right)^2 \qquad \left(\frac{1}{16}\right)^2 \qquad \ldots \qquad \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Vemos que tanto la longitud de lados como el área convergen o tienden a cero.

- ¿Cuánto es el área total pintada?
  Para resolver esto debemos sumar las áreas de los infinitos cuadrados. Esta suma de infinitos términos se denomina "*Serie*".

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\frac{1}{1024}\cdots$$

¿Cómo sumamos una serie?

Realizamos una nueva sucesión, de sumas parciales y luego evaluamos su límite, cuando la cantidad de términos tiende a infinito.

$$S_1 = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$S_2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{16} = 0.3125$$

$$S_3 = \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64} = 0.328125$$

$$S_3 = \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256} = 0.33203125$$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots+\frac{1}{4^N} = ?$$

$$\vdots$$

$$¿S_\infty = 0.3333 = \frac{1}{3}?$$

Esta serie tiene una estructura conocida, se denomina *serie geométrica*, donde cada término corresponde al anterior multiplicado por una constante ***r*** que se llama "*razón*" (en el ejemplo $r = \frac{1}{4}$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\,r^n = a + a\,r + a\,r^2 + a\,r^3 + \cdots$$

Veamos las sumas parciales de una serie geométrica:

$$S_N = a + a\,r + a\,r^2 + a\,r^3 + \cdots + a\,r^N = \sum_{n=1}^{N} a\,r^n$$

$$rS_N = a\,r + a\,r^2 + a\,r^3 + a\,r^4 + \cdots + a\,r^{N+1}$$

$$(1-r)S_N = a - a\,r^{N+1}$$

$$S_N = \begin{cases} a(N+1) & r = 1 \\ a\dfrac{1-r^{N+1}}{1-r} & r \neq 1 \end{cases}$$

Por lo tanto para obtener la suma debemos analizar el límite:

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \begin{cases} diverge & |r| \geq 1 \\ \dfrac{a}{1-r} & |r| < 1 \end{cases}$$

es decir, la serie geométrica **converge** cuando el valor absoluto de su razón es menor que 1, y **su suma**, o **valor al cual converge** la sucesión de sumas parciales es: $S = \dfrac{a}{1-r}$

Actividad 5: Complete el gráfico con las implicaciones correspondientes: $\Rightarrow$ $\Leftarrow$ $\Leftrightarrow$

existe el $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} a_n$

Converge

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Converge Condicionalmente

$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$

Dada una serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$

Diverge Absolutamente

Converge Absolutamente

no existe ó es infinito el $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} a_n$

Diverge

existe el $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} |a_n|$

Actividad 6: Recordar criterios y resolver:

Ejercicio 1: Analice la convergencia de las siguientes sucesiones:

a) $x_n = \dfrac{n}{2n+1}$ b) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ c) $x_n = 4^{n-1}$

Ejercicio 2: Analice la convergencia y la convergencia absoluta de las siguientes series:

a) $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{3}{5^n}$ b) $\sum\limits_{1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} \right)$ c) $\sum\limits_{1}^{\infty} 4^{n-1}$ d) $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ e) $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ f) $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}$

Calcule la suma de las series dadas en los incisos a) y b)

- Integrales impropias. Definición 6. Distintos tipos. Definiciones 8, 9, 10, 11 y 12.
  - Criterio de Comparación. Teorema 7 y 8.
  - Convergencia absoluta. Teorema 9.

Ejercicio 3: Utilizando la definición correspondiente, analice la convergencia de las siguientes integrales en función del parámetro k :

a) $\int_a^{\infty} \dfrac{1}{x^k} dx,\ a>0$ b) $\int_0^{a} \dfrac{1}{x^k}\ dx,\ a>0$ c) $\int_0^{1} \dfrac{dx}{(1-x)^k}$ d) $\int_0^{\infty} e^{-kx} dx$

Ejercicio 4: Analice la convergencia y la convergencia absoluta de las siguientes integrales:

$$\int_1^\infty e^{-x}\ \frac{\operatorname{sen} x}{x}\ dx \qquad \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} \qquad \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{V.P.C}\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$$

Ejemplo desarrollado:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x}dx + \int_{-1}^{0} \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{1}{x}dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{\varepsilon_2}^{0} \frac{1}{x}dx$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0^+\\ \varepsilon_2\to 0^+}}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{1}{x}dx + \int_{\varepsilon_2}^{0} \frac{1}{x}dx\right)$$

Tomando límites direccionales si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, el resultado es 0, si $\varepsilon_1 = m\varepsilon_2$, el resultado depende de *m*. Por lo tanto la integral impropia es divergente. Para que resulte convergente, ambos términos deben ser convergentes, pues cada uno depende de parámetros (ε) diferentes e independientes. Si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, se obtiene el Valor Principal de Cauchy, y lo escribimos: $\text{V.P.C}\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}dx = 0$.

En otro caso o ejemplo, cuando la integral impropia es convergente, el Valor Principal de Cauchy es igual a la integral impropia.