Funciones de Variable Compleja

Clase 19, 30 de septiembre de 2019.

Ejercicio 1: Desarrollar en **serie de Taylor** las funciones:

a) $f(z)=e^z, \quad z_0=i$ b) $f(z)=\dfrac{1}{1+z}, \quad z_0=0$ c) $f(z)=\operatorname{sen}(z), \quad z_0=0$

(en c) los coeficientes son nulos para las potencias pares, puede escribir sólo las potencias impares)

- Obtenga las regiones de convergencia en cada serie usando
  - Teorema de Taylor
  - Criterio del cociente
  - Fórmulas del radio de convergencia.
- Otras formas de encontrar los desarrollos:
  - Usar el desarrollo obtenido para $z_0=0$, $e^w=\sum_0^\infty \dfrac{w^n}{n!}$, $|w|<\infty$ y composición de funciones con $w=z-i$, para obtener el desarrollo en a) [Observe que $f(z)=e^z=e^{z-i+i}=e^i e^{z-i}=e^i e^{w(z)}$]
  - A partir del desarrollo de la serie geométrica: $\dfrac{1}{1-w}=\sum_{n=0}^\infty w^n$, $|w|<1$, obtener el desarrollo de Taylor de $f(z)=\dfrac{1}{1+z}, \quad z_0=0$ [Sug. $w=-z$].
  - A partir del desarrollo obtenido en c) desarrollar $f(z)=\operatorname{sen}(z+i), \quad z_0=-i$ [Sug. $w=z+i$]

Ejercicio 2: Desarrolle en serie de Taylor en las regiones indicadas:

a) $f(z)=z^2$, $|z|<\infty$ b) $f(z)=\dfrac{1}{z}$, $|z-1|<1$

- **Convergencia absoluta y uniforme de las series de potencias**
  - Teorema 41. Radio del círculo de convergencia = radio del círculo de convergencia absoluta.
  - Teorema 42. Convergencia uniforme. Función suma continua
  - Teorema 43. Integración de series de potencias
  - Teorema 44. Función suma analítica (recordar teorema de Morera)
  - Teorema 45. Derivación de series de potencias
  - Teorema 46. Unicidad de las series de potencias.
- Ejemplo de derivación término a término:

$$\frac{1}{(z-1)^2}=\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right)=\frac{d}{dz}\sum_0^\infty z^n=\sum_1^\infty n\,z^{n-1}=\sum_0^\infty (n+1)\,z^n \qquad |z|<1$$

De los teoremas 43 y 45 surge como corolario que la región de convergencia de la serie derivada o integrada es la misma región de convergencia que la serie original.

Ejercicio 3: Considere que $S(z)$ es la función suma de $\sum_0^\infty a_n(z-z_0)^n$ en el disco $|z-z_0|<R$. Derive término a término (teorema 45), observe los valores de $S(z_0)$, $S'(z_0)$, $S''(z_0)$, $S'''(z_0)$, … en función de los coeficientes de la serie, y encuentre una expresión para $S^{(n)}(z_0)$.

- De este resultado es inmediata la deducción de la unicidad de los coeficientes de los desarrollos en series de potencias, pues son los coeficientes de Taylor de $S(z)$.