Funciones de Variable Compleja

Clase 15, 20 septiembre de 2019.

Ejercicio 1: **Fórmula Integral de Cauchy** (Teorema 32) Calcular:

$(a)\ \int_{|z|=1} \frac{1}{z}\,dz$

Considere

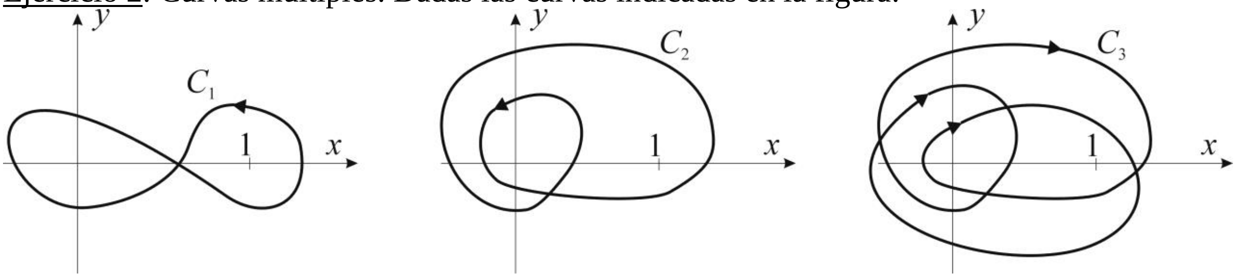
$$z_0 = 0, \quad f(z) = 1$$
$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z-0}\,dz = 2\pi i\, f(0) = 2\pi i$$

$(b)\ \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2}\,dz$

Considere

$$n = 1, \quad z_0 = 0, \quad f(z) = 1$$
$$\int_{|z|=1} \frac{1}{(z-0)^{1+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{1!}\, f'(0) = 2\pi i\, 0 = 0$$

Ejercicio 2: Curvas múltiples. Dadas las curvas indicadas en la figura:



calcular: a) $\int_{C_i} \frac{1}{z}\,dz$, b) $\int_{C_i} \frac{1}{z^2(z-1)}\,dz$

[Use **Teorema de Cauchy para Dominios Multiplemente Conexos** (Teorema 29) y **Fórmula integral de Cauchy** (Teorema 32)]

Ejercicio 3:

Sea f una función analítica sobre los puntos de una curva cerrada simple y en su interior. Muestre en todo los puntos interiores a la curva f tiene derivada de todos los órdenes. ¿todas estas derivadas son analíticas?

Recuerde: Fórmula Integral de Cauchy. Ejercicio 17.1 (pag.34).
Demostración del Teorema 33.

Ejercicio 4:

a) Sea f una función continua en un dominio simplemente conexo D, y se sabe que es nula la integral de f sobre todo curva cerrada contenida en D.

i) ¿$f(z)$ tiene una primitiva $F(z)$?

ii) ¿ $F(z)$ es analítica en D?

iii) ¿ $f(z)$ es analítica en D?

Use Teoremas 30 y 33 para demostrar el **Teorema de Morera** (Teorema 34).
Ejercico 17.2 (pag.34).

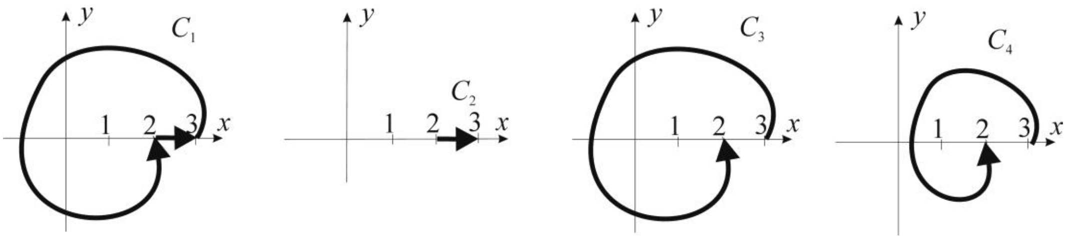
Ejercicio 5:

a) ¿puede ser una función analítica y acotada en todo el plano? Teorema de Liuville.

b) ¿ la función $\operatorname{sen}(z)$ es acotada en el plano complejo, como lo es sobre el eje real ?

c) ¿puede ser $\operatorname{sen}(z) = 2$?

Ejercicio 1: Calcular $\int_{c_i} \frac{1}{z}\,dz$ sobre las siguientes curvas:



- Observe que: C1=C2+C3
- En la curva C_1 se puede integrar usando la Fórmula Integral de Cauchy.
- En la curva C_2 se puede integrar parametrizando, y resulta una integral real.
- Para cada una de las curvas C_2 , C_3 y C_4, podemos encontrar un dominio simplemente conexo que las contengan, donde el integrando es analítico. El teorema de Primitivas (31) nos asegura que existe tal primitiva en esos tres casos. Esa primitiva es de la forma: $F(z)=\mathrm{Log}(z)$, en la cual habría que aclarar bien cuál es la definición de argumento principal, y esta tarea no es sencilla en el caso de C_3. Hay que considerar "cortes" que no sean rayos, sino curvas que vayan del origen al infinito Recuerden que el corte nunca puede "cortar" a la curva, pues si no en ese punto no sería derivable, por lo tanto no sería una primitiva válida para esa curva. En C_2 y C_4, es sencillo encontrar un Argumento Principal e integrar por primitiva, además la integral sobre C_2+C_4 es nula por teorema de Cauchy, por lo tanto $\int_{c_4} \frac{1}{z}\,dz=-\int_{c_2} \frac{1}{z}\,dz$.(que ya se calculó parametrizando o por primitiva).

  Como sobre C_3, por primitiva se complica, se pueden utilizar los resultados anteriores:

- $$\int_{c_3} \frac{1}{z}\,dz=\int_{c_2+c_3} \frac{1}{z}\,dz-\int_{c_2} \frac{1}{z}\,dz=\int_{c_1} \frac{1}{z}\,dz-\int_{c_2} \frac{1}{z}\,dz$$