Funciones de Variable Compleja

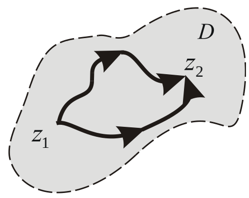
Clase 14, 18 septiembre de 2019.

Ejercicio 1: **Teorema de Cauchy-Goursat** (teorema 28), si es posible utilice este teorema para calcular:

a) $\int_{c_1} \frac{1}{z^2}dz$, b) $\int_{c_2} \frac{1}{z^2}dz$, c) $\int_{c_3} z^2\,dz$, d) $\int_{c_3} \frac{1}{z^2}dz$,

donde $c_1 : z(t) = e^{it}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$; $c_2 : z(t) = e^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi$; $c_3 : z(t) = i + \frac{e^{it}}{2}, \quad 0 \le t \le 2\pi$.

Ejercicio 2: Consecuencias del Teorema de Cauchy. Independencia de la curva. **Ejercicio 14.2** (pag.30). Sean z_1 y z_2 dos puntos distintos del plano complejo, y sea c una curva cualquiera que une ambos puntos



a) ¿La integral $\int_C 1dz$ es independiente de la curva elegida c?

b) Integrar sobre el segmento $c : z(t) = (z_2 - z_1)t + z_1 \quad 0 \le t \le 1$.

c) ¿Se podrá integrar por primitiva? Es decir: $\int_C 1dz = z\Big|_{z_1}^{z_2} = z_2 - z_1$

Ejercicio 3: **Teorema de Primitivas** (teorema 30 y 31). Si es posible utilice los teoremas de primitivas para calcular las siguientes integrales:

a) $\int_{C_1} z^3\,dz \quad c_1 : z(t) = (1+i)t \quad 0 \le t \le 1$ b) $\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2}dz$ c) $\int_{|z|=1} \frac{1}{z}dz$

Algunas soluciones y conclusiones:

1) Como $z'(t) = 1 + i$, $\int_0^1 1.(1+i)dt = \int_0^1 1dt + i\int_0^1 1dt = t\Big|_0^1 + i\,t\Big|_0^1 = (t + i\,t)\Big|_0^1 = (1+i)$.

También se puede hacer de la siguiente forma: $\int_0^1 1.(1+i)dt = (1+i)\int_0^1 1dt = (1+i)\,t\Big|_0^1 = (1+i)$.

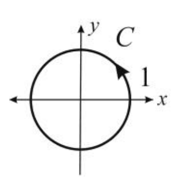
Se comprueba: $\left|\int_c f(z)dz\right| = |1+i| = \sqrt{2} \le \mathrm{ML} = 1.\sqrt{2}$

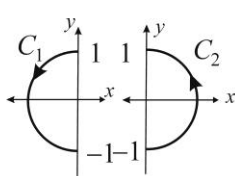
(en este caso se da la igualdad $M = 1$ y $L = \sqrt{2}$).

2) Una consecuencia del **Teorema de Cauchy** es que si una función es analítica en un dominio simplemente conexo su integral es independiente de la curva, sólo depende de los puntos inicial y final.

3) Primitivas (teorema 30 y 31).
Si una función continua f, tiene una primitiva F sobre una curva que se encuentra en un dominio D (abierto conexo, puede tener "agujeros"), el teorema 30 asegura que la integral se puede resolver por la regla de Barrow ($F(z_2)$–$F(z_1)$). Si la curva es cerrada la integral es cero.
Si la función f es analítica y D es un dominio simplemente conexo ("sin agujeros"), el teorema 31 asegura que existe tal primitiva (para encontrarla se pueden usar las técnicas conocidas de funciones reales, sustitución, integración por partes).

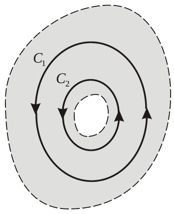
Ejercicio 4: Calcular la integral $\int_{c_i} \frac{1}{z}dz$ sobre las curvas mostradas en las figuras



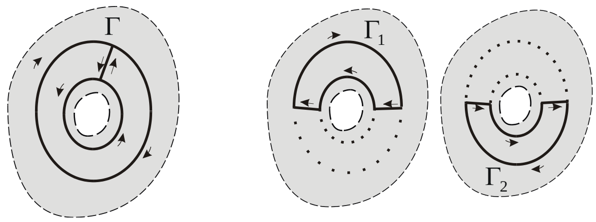


Ej.14.4 (pag. 30 de la guía de teoría):

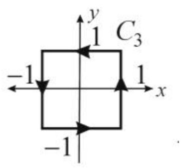
a) Muestre que si f es una función analítica en la región comprendida entre las curvas cerradas simples C_1 y C_2 y sobre las mismas, como indica la figura, entonces: $\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$.



[Sug. considere las curvas Γ, o Γ1 y Γ2 como muestran las figuras y el teorema de Cauchy-Goursat]

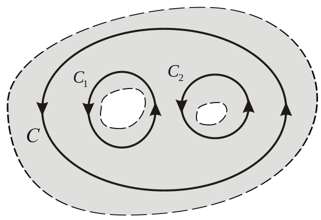


Utilice este resultado para calcular $\int_{C_3} \frac{1}{z} dz$ usando el resultado del ej. 2



b) De manera similar al ejercicio anterior muestre que si f es analítica en la región comprendida entre las curvas C, C_1 y C_2, y sobre las mismas (como indica la región sombreada de la figura)

$\int_{C} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$



[**Teorema de Cauchy para Dominios Multiplemente Conexos** (Teorema 29)]