Funciones de Variable Compleja

Clase 13, 16 de septiembre de 2019.

Ejercicio 0 :

a) Encuentre una rama de $\log(z)$ que sea analítica en $\operatorname{Im}(z) > 0$ y tal que $\operatorname{Log}(i) = \frac{5}{2}\pi i$

b) Muestre que: $\arcsin(z) = \frac{1}{i}\log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$

Ejercicio 1: Graficar las siguientes curvas

a) $c_1 : z(t) = (1+i)t \quad 0 \le t \le 1$

b) $c_2 : z(t) = t \quad 0 \le t \le 1$

c) $c_3 : z(t) = 1 + it \quad 0 \le t \le 1$

Integrales:

- Funciones complejas de variable real. Definición 44 y 45
- Contornos: curvas o arcos, simples, cerrados, suaves.
- Integrales de funciones complejas de variable real. Definición 46.
- Lema 1 y Lema2.

Ejercicio 2: Calcular por definición y luego usando Lema 1 y 2 (regla de la cadena y primitivas):

$$\int_0^{\pi} e^{it} dt \qquad \frac{d\left(e^{it}\right)}{dt} \qquad ¿\frac{d\left(e^{it}\right)}{dt} = ie^{it}?$$

Ejercicio 3: Graficar las siguientes curvas y evaluar $z'(t)$:

d) $c_1 : z(t) = (1+i)t \quad 0 \le t \le 1$

e) $c_2 : z(t) = t \quad 0 \le t \le 1$

f) $c_3 : z(t) = 1 + it \quad 0 \le t \le 1$

g) $c_4 : z(t) = e^{it} \quad 0 \le t \le \pi/2$

h) $c_5 : z(t) = e^{it} \quad 0 \le t \le 2\pi$

Ejercicio 4: Integral de contorno. Definición 47. $\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$. Calcular $\int_{C_1} \bar{z}\, dz$, en las curvas del ejercicio anterior. Observe que: $\int_{C_1} \bar{z}\, dz \ne \int_{C_2+c_3} \bar{z}\, dz$ .Verificar que: $\left|\int_c f(z)dz\right| \le \mathrm{ML}$

Ejemplos desarrollados:

5.a) $\int_{C_1} \bar{z}\, dz$, como $z'(t) = 1+i$,

$$\int_0^1 \overline{(1+i)t}.(1+i)dt = \int_0^1 (1-i).(1+i)tdt = \int_0^1 2tdt = t^2\Big|_0^1 = 1 .$$

Se comprueba: $\left|\int_c f(z)dz\right| = 1 \le \mathrm{ML} = \sqrt{2}.\sqrt{2} = 2$ ($M = \sqrt{2}$ y $L = \sqrt{2}$).

5.d) $\int_{C_4} \bar{z}\, dz$ como $z'(t) = ie^{it}$,

$$\int_{c_2} \frac{1}{z^2} dz = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{e^{2it}} ie^{it} dt = \int_0^{\pi/2} ie^{-it}\, dt = -e^{-it}\Big|_0^{\pi/2} = -e^{-i\pi/2} + e^0 = 1 + i ,$$

se comprueba que : $\left|\int_c f(z)dz\right| = \sqrt{2} \le \mathrm{ML} = 1.\frac{\pi}{2}$.