Funciones de Variable Compleja

Clase 10, 4 de septiembre de 2019.

Ejercicio 1: Si $-\pi < \mathrm{Arg}(z) \leq \pi$, calcule:

$\log(1+i) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $Log(1+i) =$

Ejercicio 2: Analizar: continuidad, derivabilidad, y analiticidad de la función

$$f(z) = \ln|i-z| + i\,Arg(i-z), \quad \text{con } -\pi \leq Arg(w) < \pi$$

Definiciones 41 y 42: **Ramas – Cortes - Puntos de ramificación**

La función $\log(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi i$ es multivaluada. A cada punto z le corresponden infinitos valores complejos distintos.

Si fijamos un Argumento Principal y un valor de k (entero), obtenemos una función univaluda que llamamos "**rama**" de la función multivaluada. Hay infinitas ramas, si se elige $k = 0$, la llamamos rama principal. Todas las ramas de $\log(z)$ son analíticas excepto donde quede la discontinuidad del Argumento elegido. Siempre será una línea que une el origen con el infinito. Esta línea de puntos singulares se denomina "**corte**", y los puntos comunes a todo corte, el origen y el infinito, se llaman "**puntos de ramificación**"

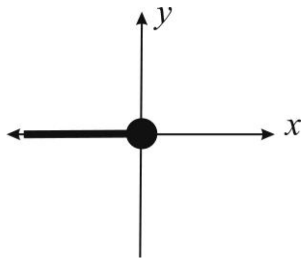
Por ejemplo si consideramos $-\pi < \mathrm{Arg}_1(z) \leq \pi$

$f_1(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}_1(z)$

$f_2(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}_1(z) + 2\pi i$

$f_3(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}_1(z) - 4\pi i$

$f_4(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}_1(z) + 16\pi i$



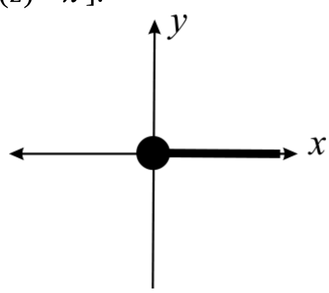
Son todas ramas de $\log(z)$, la primera es la principal (para el argumento elegido), y todas tienen el "corte" o puntos singulares sobre el eje real negativo [$\mathrm{Arg}_1(z) = \pi$].

En cambio si consideramos $0 \leq \mathrm{Arg}_2(z) < 2\pi$

$g_1(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}_2(z)$

$g_2(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}_2(z) - 2\pi i$

$g_3(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}_2(z) + 8\pi i$



Son todas ramas de $\log(z)$, la primera es la principal, y todas tienen el "corte" o puntos singulares sobre el eje real positivo [$\mathrm{Arg}_2(z) = 0$]

Un ejemplo más familiar de función multivaluada es la función: $\sqrt{z}$, pues puede tomar dos valores diferentes, pero además podemos definir infinitas ramas, pues hay infinitas formas de definir el argumento principal.

$$\sqrt{z} = |z|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}(\mathrm{Arg}\,z + 2k\pi)} = \sqrt{|z|}\, e^{i\frac{\mathrm{Arg}\,z}{2}} e^{ik\pi} = \sqrt{|z|}\, e^{i\frac{\mathrm{Arg}\,z}{2}} (-1)^k \qquad k = 0,1.$$

Por lo tanto si $-\pi < \operatorname{Arg}(z) \leq \pi$, la rama principal de $\sqrt{z}$, es $f(z) = |z|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\operatorname{Arg} z}{2}}$, el corte se ubica sobre el eje real negativo.

Exponentes complejos $z^{\alpha} = e^{\alpha \log z}$ ¿es multivaluada?

- si $\alpha = n$, exponente natural:

  $z^{n} = e^{n \log z} = e^{n[\ln|z| + i \operatorname{Arg} z + 2k\pi i]} = |z|^{n} e^{i n \operatorname{Arg} z} e^{i 2k\pi} = |z|^{n} e^{i n \operatorname{Arg} z}$

- si $\alpha = \dfrac{1}{2}$, exponente racional:

  $z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\log z} = e^{\frac{1}{n}\ln|z|} e^{\frac{i}{2}\arg z} = |z|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}(\operatorname{Arg} z + 2k\pi)} = \sqrt{|z|} e^{i\frac{\operatorname{Arg} z}{2}} e^{ik\pi} = \sqrt{|z|} e^{i\frac{\operatorname{Arg} z}{2}} (-1)^{k} \qquad k = 0,1.$

- ¿si α es complejo?

Ejercicio 1: Sea $-\pi < \operatorname{Arg}(z) \leq \pi$. Encuentre los puntos singulares (corte y puntos de ramificación) de:

a) $f(z) = e^{i \operatorname{Log} z} = e^{i[\ln|z| + i \operatorname{Arg} z]}$

b) $f(z) = \operatorname{Log}(iz)$

Ejercicio 2: (Ejercicios de la guía)

Ejercicio 7 de la guía(pag. 18) Continuidad y derivabilidad

Ejercicio 5 de la guía (pag. 16)

Ejercicio Sea f una función de variable compleja. Muestre que: $\lim_{z\to z_0} f(z) = 0 \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} |f(z)| = 0$.

Ejercicio 2: (Ejercicios de la guía)

Ejercicio 9 de la guía(pag. 21)

Ejercicio 10 de la guía (pag. 22)
