Segundo Parcial de Funciones de Variable Compleja 13/05/2019

Nombre: ______________________ LU: __________ NOTA: __________

*** Realice todos los ejercicios en hojas separadas, numeradas y con nombre.**
*** Ejercicios muy desprolijos, o que no cuenten con su debida justificación, no serán evaluados.**
*** Si aprobó el Taller 3 y/o 4 previamente, NO debe resolver el recuperatorio correspondiente.**

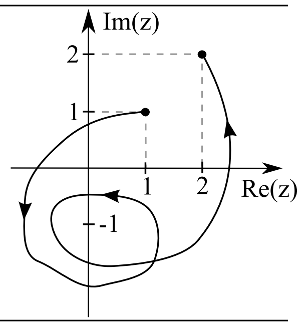
Taller 3 (Recuperatorio) Halle el valor de la siguiente integral: $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{\sqrt{z}}}{\sqrt{z}}dz$, $\quad -\pi < \mathrm{Arg}(z) \leq \pi$, $\gamma: \ z(t) = e^t\cos t + i\mathrm{sen}t$, $t \in [0, \pi/2]$, $\sqrt{i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Taller 4 (Recuperatorio) Halle la región de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inz}}{n}$. Estudie el comportamiento de la serie en la frontera de la región de convergencia.

---

1. (a) Exprese la función $f(z) = \dfrac{1}{z(z+i)^2}$ como suma de fracciones simples, utilizando el cálculo de residuos.

(b) Calcule la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z(z+i)^2}\,dz$, donde γ es la curva de la figura.



---

2. (a) Sea $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)^2}$. Halle, si es posible, el desarrollo de Taylor de f centrado en $z_0 = 1$ y determine el radio de convergencia.

(b) Determinar y clasificar los puntos singulares de $g(z) = \dfrac{z-1-\mathrm{sen}(z-1)}{(z-1)^4}$. Calcular el o los residuos correspondientes.

(c) Halle un desarrollo de Laurent que represente a $h(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)(z+2i)}$ en el anillo $4 < |z+2i| < \infty$. Con este desarrollo, ¿puede clasificar algún punto singular de h? En caso afirmativo, clasifíquelo.

---

3. (a) Sea $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2}$ y C_R la semicircunferencia $z(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, encuentre una cota $M.L$ tal que $\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leq M.L$, luego muestre que $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = 0$.

(b) Sea $S(z)$ la función suma de la serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^{-n}$, que es convergente para todo $z \neq 0$. Además, se sabe que $c_n \neq 0$. Indique si las siguientes afirmaciones son ciertas. Justifique (utilice definiciones, propiedades, enunciados de teoremas, o contraejemplos)

(i) $\displaystyle\lim_{z\to 0} S(z) = c_0$.

(ii) $\int_{|z|=1} S(z)\,dz = 0$.

(iii) $S(z)$ tiene primitiva definida para todo $z \neq 0$.

Ejercicio	T3	T4	Ej.1	Ej.2	Ej.3
Nº de hojas entregadas					