Primer Parcial de Funciones de Variable Compleja 08/04/2019

Nombre: __________________________________ LU: ____________ NOTA: __________

*** Realice todos los ejercicios en hojas separadas, numeradas y con nombre.**
*** Ejercicios muy desprolijos, o que no cuenten con su debida justificación, no serán evaluados.**
*** Si aprobó el Taller 1 y/o 2 previamente, NO debe resolver el recuperatorio correspondiente.**
*** En todos los casos que sea necesario, para $w \in \mathbb{C}$, considere $0 \leq \mathbf{Arg}(w) < 2\pi$.**

Taller 1 (Recuperatorio) Clasifique la siguiente serie e integral impropia en: Condicionalmente Convergente, Absolutamente Convergente o Divergente. Justifique su respuesta:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-1}$ (ii) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$

Taller 2 (Recuperatorio) Dada la función $f(z) = u(x,y) + iy$, $u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

(i) Analice la continuidad de $f(z)$ en $z = 0$.

(ii) Las ecuaciones de Cauchy-Riemann, ¿se verifican en $z = 0$?

(iii) Las ecuaciones de Cauchy-Riemann, ¿se verifican en algún subconjunto de $\mathbb{C} - \{0\}$?

(iv) Sin realizar más cálculos y con los resultados anteriores, ¿qué puede decir acerca de la derivabilidad de f?

---

1. (a) Halle la región de analiticidad de las siguientes funciones. Donde sea posible calcule su derivada:

$$\text{(i) } f(z) = \frac{\overline{(e^{i\bar{z}})}}{(z^3+1)}. \qquad \text{(ii) } f(z) = \ln|(1-i)z| + i\,\mathrm{Arg}\left((1-i)z\right).$$

(b) Dada $v(x,y) = \mathrm{Arg}\left((1-i)(x+iy)\right)$, indique si se trata de una función armónica en $|x-2+iy| < 1$, y en caso afirmativo halle una armónica conjugada.

---

2. Halle y represente gráficamente los $z \in \mathbb{C}$ que verifiquen:

(a) $\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right) = 0.$ (b) $e^{-i2z} + \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^6 = 0.$

---

3. (a) Dada la serie de funciones $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\,(1-x)(-x)^n$ encuentre la región de convergencia absoluta (puntual) y muestre que converge uniformemente en el intervalo $[0, 0.5]$. ¿La función suma es continua en $[0, 0.5]$?

(b) Muestre que:

(i) $\mathrm{sen}(iz) = i\,\mathrm{senh}(z)$.

(ii) Si f es analítica en $z = i \Rightarrow f$ es analítica en todo punto de un entorno de $z = i$.

Ejercicio	T1	T2	Ej.1	Ej.2	Ej.3
Nº de hojas entregadas					