Análisis de Circuitos Eléctricos

Zabalet Victorio

Estudiante de Ingeniería Electrónica
Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina
victorio_zabalet@hotmail.com

Julio 2013

Resumen: En el articulo se pretende mostrar la utilidad de la transformada de Laplace a la hora de resolver ecuaciones diferenciales lineales, en este caso la ecuaciones usada es la que modela un circuito eléctrico RLC.

Palabras clave: transformada de Laplace, circuitos eléctricos RLC, ecuaciones diferenciales lineales.

I. INTRODUCCIÓN

El uso de la transformada de Laplace resulta muy útil a la hora de analizar sistemas de circuitos eléctricos, una ventaja que esta presenta es que las condiciones iniciales son tomadas en cuenta automáticamente en el proceso de transformación. En este articulo se aplicara dicha transformada con el fin de resolver una ecuación diferencial que simula el comportamiento de un circuito RLC

II. CIRCUITOS ELÉCTRICOS DE UNA SOLA MALLA

Un circuito eléctrico pasivo puede ser construido por tres compontes: resistores (poseen una resistencia característica de valor R comúnmente medida en ohm [Ω]), capacitores (es un componente capaz de almacenar energía, tienen una capacitancia C medida en Faradios [F]) y por ultimo una inductores (que tienen inductancia L, medida en henrys [H]) con variables asociadas dependientes del tiempo, estas son corriente i(t) (medida en ampere [A]) y voltaje (medido en volts [V]).

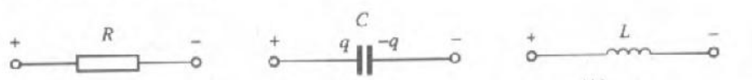
El flujo de corriente en el circuito está relacionado con la derivada de la carga respecto del tiempo obteniendo así la ecuación (1)

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{1}$$

Las relaciones entre el flujo de corriente *i(t)* y la caída de voltaje *v(t)* a través de los elementos en el tiempo *t* son:

Caída de voltaje a través de la resistencia = Ri

Caída de voltaje a través del capacitor = $\frac{1}{c}\int idt = \frac{q}{c}$



Resistor Capacitor Inductor

Figura 1 : componentes pasivos en circuito electricó

III. RESOLUCIÓN DE CIRCUITO RLC

Se utiliza un circuito RLC al cual se le aplicara la transformada de Laplace para su estudio. Este está compuesto por una resistencia de 160 Ω, un capacitor de $10^{-4}F$ y un inductor de 1 H conectados en serie a una fuente de voltaje e(t) de 20 V. En el instante inicial no hay circulación de corriente y el capacitor se encuentra descargado. El objetivo es determinar la corriente resultante en el circuito y la carga del capacitor.

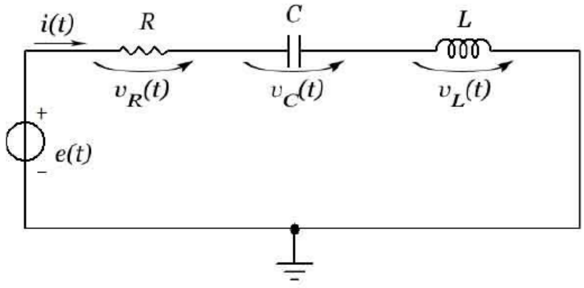


Figura 2 : Circuito RLC

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff al circuito RLC se obtiene:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = e(t)$$

Si se utiliza la igualdad $i = \frac{dq}{dt}$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = e(t)$$

Sustituyendo los valores dados para L, R, C y e(t)

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 160\frac{dq}{dt} + 10^4 q = 20$$

Esta será la ecuación diferencial a la cual aplicando la transformada de Laplace a ambos lados se llega a que

$$(s^2 + 160s + 10^4)Q(s) = s * q(0) + \dot{q}(0) + 160q(0) + \frac{20}{s}$$

Donde Q(s) es la transformada de q(t) y tomando que q(0) = 0, $\dot{q}(0) = 0$ y i(0)=0, (5) se reduce a que

$$(s^2 + 160s + 10^4)\,Q(s) = \frac{20}{s}$$

Esto es,

$$Q(s) = \frac{20}{s(s^2 + 160s + 10^4)}$$

Haciendo el desarrollo en fracciones simples se obtiene:

$$Q(s) = \frac{\frac{1}{500}}{s} - \frac{1}{500}\frac{s+160}{s^2+160s+10^4}$$

$$= \frac{1}{500}\left[\frac{1}{s} - \frac{s+80+\frac{4}{3}(60)}{(s+80)^2+\ 60^2}\right]$$

$$= \frac{1}{500}\left[\frac{1}{s} - \left[\frac{s+\frac{4}{3}(60)}{s^2+\ 60^2}\right]_{s\to s+80}\right]$$

Aplicando la transformada inversa y haciendo uso del teorema de traslación da:

$$q(t) = \frac{1}{500}(1 - e^{-80t}\cos(60t) - \frac{4}{3}e^{-80t}sen(60t) \qquad (2)$$

Luego, la corriente resultante en el circuito para cada instante de tiempo esta dada por:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{3}e^{-80t}sen\ (60t) \qquad (3)$$

Las ecuaciones (2) y (3) son la solución al problema planteado de modelo, las cuales representan la carga en el capacitor y la corriente eléctrica que circula por el circuito en un tiempo t.

IV. LEYES Y TEOREMAS UTILIZADOS

Ley 1 Segunda *ley de Kirchhoff o por malla*

En un lazo cerrado, la suma de todas las caídas de tensión es igual a la tensión total suministrada. De forma equivalente, la suma algebraica de las diferencias de potencial eléctrico en un lazo es igual a cero.

$$\sum_{k=1}^{n} V_k = V_1 + V_2 + V_3 \ldots + V_n = 0$$

□

Teorema 1 Si f(t) es una función que tiene una transformada de Laplace F(s), con Re(s)>σ, entonces la función $e^{at}f(t)$ también tiene una trasformada de Laplace dada por:

$$\mathcal{L}\{\ e^{at}f(t)\} = F(s-a), \quad Re(s) >\ \sigma + Re(a)$$

Prueba.

Una prueba de este teorema se sigue directamente de la definición de transformada de Laplace, ya que:

$$\mathcal{L}\{\ e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-s}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt$$

Luego, como:

$$\mathcal{L}\{\ e^{at}f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\ , \quad Re(s) > \sigma$$

Se observa que la integral anterior esta estructurada como la transformada de la Laplace de f(t), excepto que s-a toma el lugar de s, así que:

$$\mathcal{L}\{\, e^{at} f(t)\} = F(s-a), \;\; Re(s-a) > \sigma$$

O bien:

$$\mathcal{L}\{\, e^{at} f(t)\} = F(s-a), Re\,(s) > \;\sigma + \; Re\,(a)$$

Una manera que permite expresar el resultado de manera compacta es:

$$\mathcal{L}\{\, e^{at} f(t)\} = [\mathcal{L}\{f(t)\}]_{s\to s-a} = [F(s)]_{s\to s-a}$$

V. CONCLUSIÓN

Como conclusión, se demostró que la transformada de Laplace resulta muy útil para resolver ecuaciones diferenciales lineales ya que resulta muy rápida y simple su aplicación. Además brinda toda la información de manera completa mediante la solución obtenida.

REFERENCIAS

[1] G. Calandrini, "Guía de Definiciones y Teoremas estudiados en el curso de Funciones de Variable Compleja". 2do. Cuatrimestre 2012

[2] G. James, "Matemáticas avanzadas para ingeniería", International Thomson Editores, sexta edición 1997, pp. 1-3.

[3] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en https://es.wikipedia.org/wiki/Leyes_de_Kirchhoff [acceso el 14 de julio de 2013].

[4] Wikipedia, *La enciclopedia libre*, [internet], disponible en http://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_de_Laplace [acceso el 14 de julio de 2013].