# Transformada de Fourier de una Imagen y filtrado de una imagen en el dominio de la frecuencia.
# Funciones de Variable Compleja

Virginia Friedrich

*Estudiante de Ingeniería en Sistemas de Computación*
*Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina*
*virfried@hotmail.com*
Marzo 2013

*Resumen*: en este informe se desarrolla el concepto de imagen digital, se explica brevemente la digitalización de una imagen continua para transformarla en una función discreta de dos dimensiones. Luego se transforma esta función al dominio de la frecuencia para permitir el filtrado de ciertas frecuencias y luego al anti transformar la función de la imagen permitir que esta filtrada pueda verse mejor. También se presenta brevemente el concepto de filtro de una imagen, clasificando y ejemplificando los distintos tipos de filtros.

*Palabras clave*: Transformada de Fourier, Procesamiento de Imágenes Digitales, Filtrado de imágenes digitales.

## I. INTRODUCCIÓN

La transformada de Fourier es una herramienta importante dentro del procesamiento digital de imágenes. Esta es utilizada para descomponer una imagen en sus componentes seno y coseno. La salida de la transformación representa a la imagen en el dominio de Fourier o dominio de la frecuencia, mientras que la imagen de entrada esta en el dominio espacial. Cada punto de la imagen en el dominio de Fourier representa una frecuencia particular contenida en la imagen en el dominio del espacio. La transformada de Fourier de una imagen nos permite aplicar distintos tipos de filtros a la imagen para contribuir a una correcta visualización de esta.

## II. IMAGEN DIGITAL

Una imagen en un sentido muy amplio "es una representación, sin parecido o imitación de un objeto o cosa, es decir, una descripción grafica, algo introducido para representar otra cosa más". Una imagen contiene información descriptiva acerca del objeto que representa. Otra definición de imagen, orientada a una imagen grafica, en ingles "picture" la define como "Una representación hecha por medio de dibujos, pinturas o fotografía".

La palabra digital se relaciona al cálculo por métodos numéricos o por unidades discretas. De esta manera podemos definir a una imagen digital como la representación numérica de un objeto. Una imagen monocroma puede ser definida como una función en dos dimensiones f(x,y), donde x e y son coordenadas en el plano espacial, y la amplitud de f en cualquier par de coordenadas (x,y) es llamada la intensidad, nivel de gris o brillo de la imagen en ese punto. Cuando x, y y los valores de intensidad de f son finitos, cantides discretas, esta imagen puede ser representada de manera digital (en una computadora). Para los fines de este artículo utilizaremos a la definición de imagen monocroma digital como sinónimo de imagen digital.

### A. *Muestreo y cuantización de una imagen*

Existen muchas maneras de adquirir imágenes (fotografías de distintos tipos, cámaras de video, etc.), para poder manipular estas imágenes es necesario generar imágenes digitales a partir de los datos continuos obtenidos, esto se logra a partir de dos procesos: muestreo y cuantificación. El muestreo es el proceso de digitalizar las coordenadas espaciales de la imagen y la cuantificación es el proceso de digitalizar el nivel de gris. De esta manera una imagen continua puede describirse de manera aproximada por una serie de muestras

igualmente espaciadas organizadas en forma de matriz donde cada elemento de la matriz (pixel) es una cantidad discreta:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} f(0,0) & \cdots & f(0,M-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(N-1,0) & \cdots & f(N-1,M-1) \end{pmatrix}$$

Durante el proceso de digitalización es necesario decidir el valor de M y N y el número de niveles de gris (L) permitidos para cada pixel. Es una práctica común que estos valores sean potencias enteras de 2 ya físicamente (en memoria) serán representados en binario. El valor de M, N y L está fuertemente relacionado con la calidad o resolución de la imagen, mientras mayores sean estos valores mayor será la calidad.

Además de poder representar una función en el dominio del espacio, es posible representarla en el dominio de la frecuencia. Las representaciones en este dominio detallan con cuanta frecuencia se repiten ciertos patrones en una imagen, consiguiendo representar la información de tal imagen. Esta representación puede ser útil ya que teniendo la frecuencia de repetición de tales patrones se pueden detectar y alterar directamente elementos presentes en las imágenes, como el ruido, contornos o texturas.

## III. TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA IMAGEN

Sea f(x) una función continua de variable real x, la transformada de Fourier de esta función indicada por F[f(x)] está dada por la ecuación:

$$F[f(x)] = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx$$

Donde j es la raíz cuadrada de (-1) y u la variable de frecuencia. Dada F(u) podemos volver a hallar f(x) empleando la transformada inversa de Fourier:

$$f(x) = F^{-1}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{-j2\pi ux}du$$

Estas dos ecuaciones se denominan Par de Transformadas de Fourier, existen siempre que f(x) sea continua e integrable y F(u) sea integrable.

Estos conceptos pueden fácilmente extenderse a funciones bidimensionales del tipo f(x,y). Si la función f(x,y) es continua e integrable y F(u,v) es integrable, entonces existe el par de transformadas de Fourier,

$$f(x,y) = \iint_{\infty} F(u,v)e^{j2\pi(ux+vy)}dudv$$

$$F(u,v) = \iint_{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy$$

Supongamos que la función continua f(x) se ha discretizado en la sucesión,

$$\{f(x_0), f(x_0+\Delta x), f(x_0+2\Delta x), \dots, f(x_0+(N-1)\Delta x)\}$$

Tomando N muestras separadas una distancia Δx, como se puede observar en la figura 1.

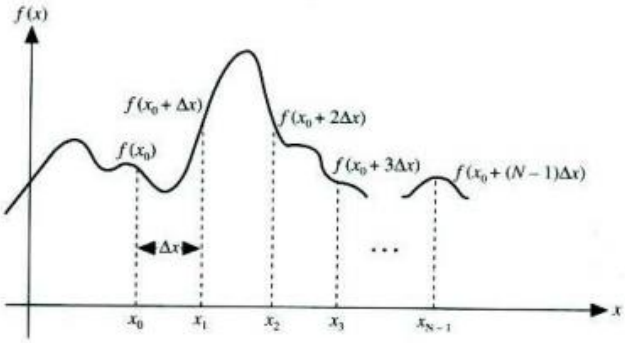


Imagen 1: Discretización de una función.

El par de transformadas discretas de Fourier que se aplica a las funciones muestreadas esta dado por,

$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)e^{-j2\pi\frac{ux}{N}}$$

$$f(x) = \frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1} F(u)e^{j2\pi\frac{ux}{N}}$$

Los valores u de la transformada discreta de Fourier corresponden a las muestras de la transformación continua en los valores 0, Δu,2Δu,…, (N-1) Δu.

Para el caso de funciones discretizadas de dos variables el par de transformada discreta de Fourier es:

$$F(u,v) = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

Estas últimas ecuaciones son las utilizadas para trabajar con imágenes, se expreso que una imagen puede ser representada por medio de una función discreta f(x,y) y por esto es posible hallar la transformada de Fourier de la imagen F(u,v).

## IV. FILTRADO DE UNA IMAGEN

Una imagen digital se puede filtrar en el dominio de la frecuencia o en el dominio del espacio. Los filtros en el dominio de la frecuencia se usan para eliminar altas o bajas frecuencias de la imagen, o bien realzar o detectar bordes.

Los pasos a seguir para filtrar una imagen son:

1. Se multiplica cada entrada f(x,y) por $(-1)^{x+y}$.

2. Se transforma la imagen en su dominio de frecuencia mediante la transformada Discreta de Fourier, F(u,v).

3. Se multiplica por un *filtro de frecuencia* H(u,v), para cada (u,v): G(u,v) = H(u,v)*F(u,v).

4. Se calcula la inversa de la Transformada Discreta de Fourier, volviendo así al dominio del espacio.

5. Se vuelve a multiplicar por $(-1)^{x+y}$.

Podemos dividir a los filtros de frecuencias en 3 grupos:

- Filtros de paso bajo (lowpass filter).
- Filtros de paso alto (highpass filter).
- Filtros de banda (bandpass filter).

### *A. Filtros de paso bajo*

Los filtros de paso bajo atenúan las componentes de medias-altas frecuencias y dejan intactas las bajas en función de la frecuencia de corte que se elija. Gráficamente eliminan todo lo que no sean variaciones suaves de nivel de gris.

El más sencillo es el filtro de paso bajo ideal: $H(u,v) = \begin{cases} 1 \text{ si } D(u,v) \leq D_0 \\ 0 \text{ si } D(u,v) > D_0 \end{cases}$

donde D(u,v) es la distancia euclídea de (u,v) al origen del plano de frecuencias. Este filtro suprime las altas frecuencias mayores que un cierto valor D0, que se denomina frecuencia de corte, y deja las demás tal como están.

### B. *Filtros de paso alto*

Deja inalterables las altas frecuencias y atenúa o elimina las bajas frecuencias. El resultado en el dominio del espacio consiste en un realzado de los cambios bruscos de niveles de grises. De ahí que se use para detectar bordes. Las áreas de nivel de gris constantes o con poca variación se corresponden con bajas frecuencias, que se suprimen.

El más sencillo es el filtro de paso alto ideal: $H(u,v) = \begin{cases} 0 \text{ si } D(u,v) \leq D_0 \\ 1 \text{ si } D(u,v) > D_0 \end{cases}$

donde D(u,v) es la distancia euclídea de (u,v) al origen del plano de frecuencias. Este filtro suprime las frecuencias menores o iguales que un cierto valor D0 que se denomina frecuencia de corte.

### C. *Filtros de banda*

Un filtro de banda atenúa las altas y bajas frecuencias, pero mantiene intactas las frecuencias que se encuentran en una banda determinada. En el caso del filtro ideal, solo deja pasar las frecuencias que están entre dos frecuencias de corte. Se puede obtener un filtro de banda multiplicando uno de paso bajo por uno de paso alto, en el que la frecuencia de corte del de paso bajo sea superior a la de paso alto. El opuesto al filtro de paso de banda seria de "rechazo de banda" en el que se atenúan las frecuencias de la banda pero se mantienen las frecuencias fuera de ella.

## V. CONCLUSIÓN

Por medio de este informe se puede ver la importancia del análisis de Fourier para el procesamiento de Imágenes Digitales. En este caso el informe se centro en el filtrado de Imágenes pero el análisis de Fourier tiene una gran cantidad de aplicaciones dentro de otras áreas de las Ciencias de la Computación como dentro del área de Redes, Circuitos Eléctricos, etc. Adicionalmente es posible ver como los avances dentro de la computación y la algoritmia nos permiten utilizar herramientas matemáticas que utilizan una gran cantidad de cálculos matemáticos para procesar imágenes, etc.

## REFERENCIAS


[1] Rafael C. González y Richard E. Woods, "Digital Image Processing". Pearson Education. [En línea] http://sgar91.files.wordpress.com/2011/04/dip_gonzalez_2e_full.pdf

[2] Cristian Tejos, "Filtros en el dominio de la frecuencia" [En línea] http://pteam.pixinsight.com/carlos/G_Cap5.pdf

[3] C. Pinilla, A. Alcalá y F. J. Ariza, "Filtrado de Imágenes en el dominio de la frecuencia" [En línea] http://www.aet.org.es/revistas/revista8/AET8_5.pdf

[4] M.C. Carolina Rocío Sánchez Peréz, "Mejora de la imagen en el dominio de la frecuencia: transformada de Fourier" [En línea] http://ingenieria.uatx.mx/mcic-vision-artificial/files/2011/04/Dominio-de-la-Frecuencia_01_Abril_2011.pdf